



Tema 4: Hidrodinámica



Ingeniería Hidráulica
Universidad de Oviedo

Hidráulica e Hidrología 2º Ing. Civil y Doble Grado

Curso 2022/2023

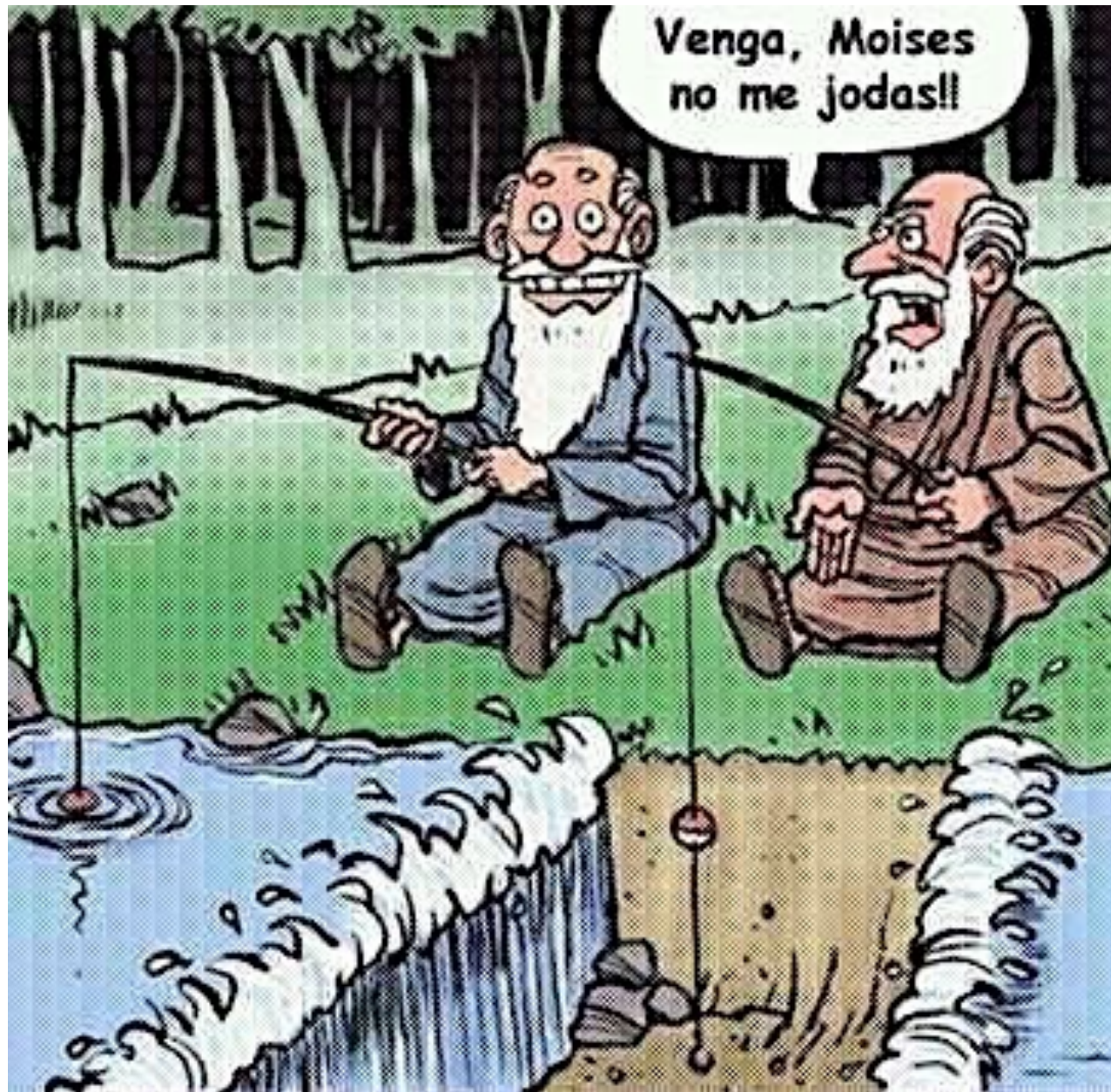
Antonio Navarro Manso
Prof. Dr. Ingeniero de Caminos

Índice

1. Introducción: volúmenes de control
2. Ecuación de la continuidad
3. Ecuación de la cantidad de movimiento
4. Teorema de Bernoulli
5. Ejemplos
6. Ecuaciones de Navier-Stokes
7. Números adimensionales y semejanza
8. Capa límite
9. Arrastre y sustentación



1. Introducción: volúmenes de control



anónimo...

1. Introducción: volúmenes de control



Acueducto de Segovia, España, 50 – 100 d.C.

1. Introducción: volúmenes de control

1.1 Métodos de análisis en Mecánica de Fluidos

- **Análisis cinemático:**
 - Estudio de la deformación del medio fluido debida a gradientes de velocidad
 - Ec. diferencial de continuidad

- **Análisis diferencial:**
 - Principios generales de conservación en formulación diferencial (ec. constitución)
 - Objeto: cálculo de $\vec{v}, p, \rho, T \dots = f(x, y, z, t)$

- **Análisis integral:**
 - Principios generales de conservación para volúmenes de control
 - Requiere conocer a priori la distribución del flujo en el contorno del VC, y también en el interior si es flujo no estacionario
 - Objeto: cálculo de flujos máxicos, fuerzas, momentos, potencias... (no exacto)

1. Introducción: volúmenes de control

1.1 Métodos de análisis en Mecánica de Fluidos

- **Análisis numérico - CFD (Computational Fluid Dynamics):**
 - Resolución aproximada de las ec. diferenciales por métodos iterativos
 - Equipos y programas informáticos
 - Objeto: cálculo de $\vec{v}, p, \rho, T \dots$ en algunos puntos del dominio (nodos)
 - **EL CÁLCULO POR ORDENADOR NO ES UNA PANTALLA PARA TAPAR NUESTRA IGNORANCIA. MÁS BIEN MULTIPLICA LOS NOCIVOS EFECTOS DE LA MISMA**

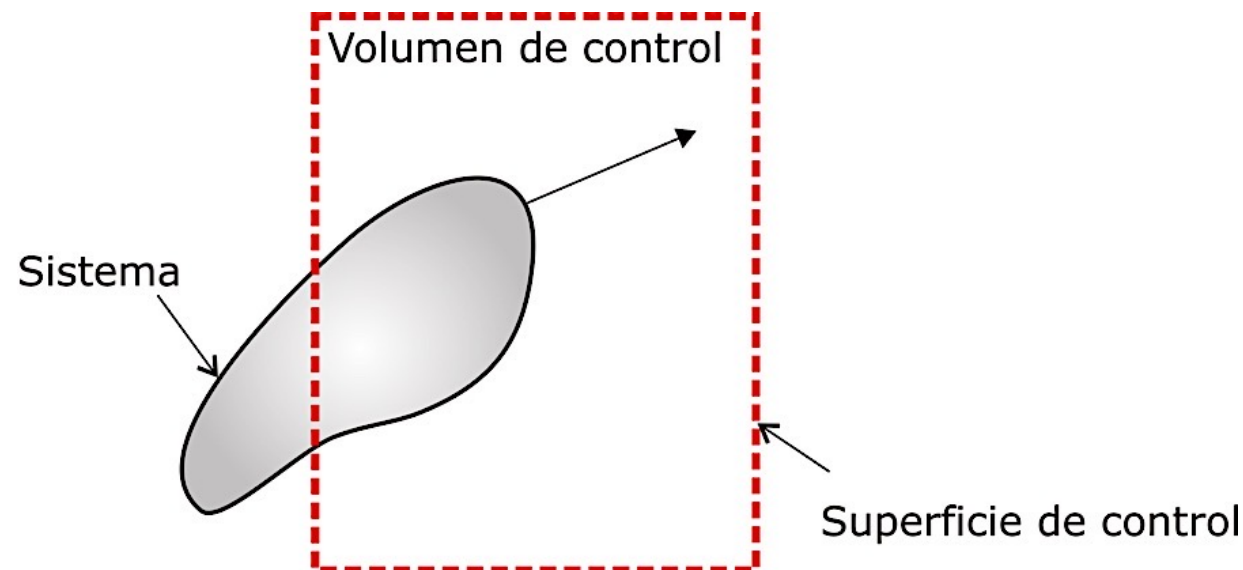


- **Análisis dimensional (experimental):**
 - Estudio de dimensiones básicas y órdenes de magnitud para simplificar (→ ingeniería)
 - Extrapolación de datos experimentales o numéricos bajo condiciones de semejanza

1. Introducción: volúmenes de control

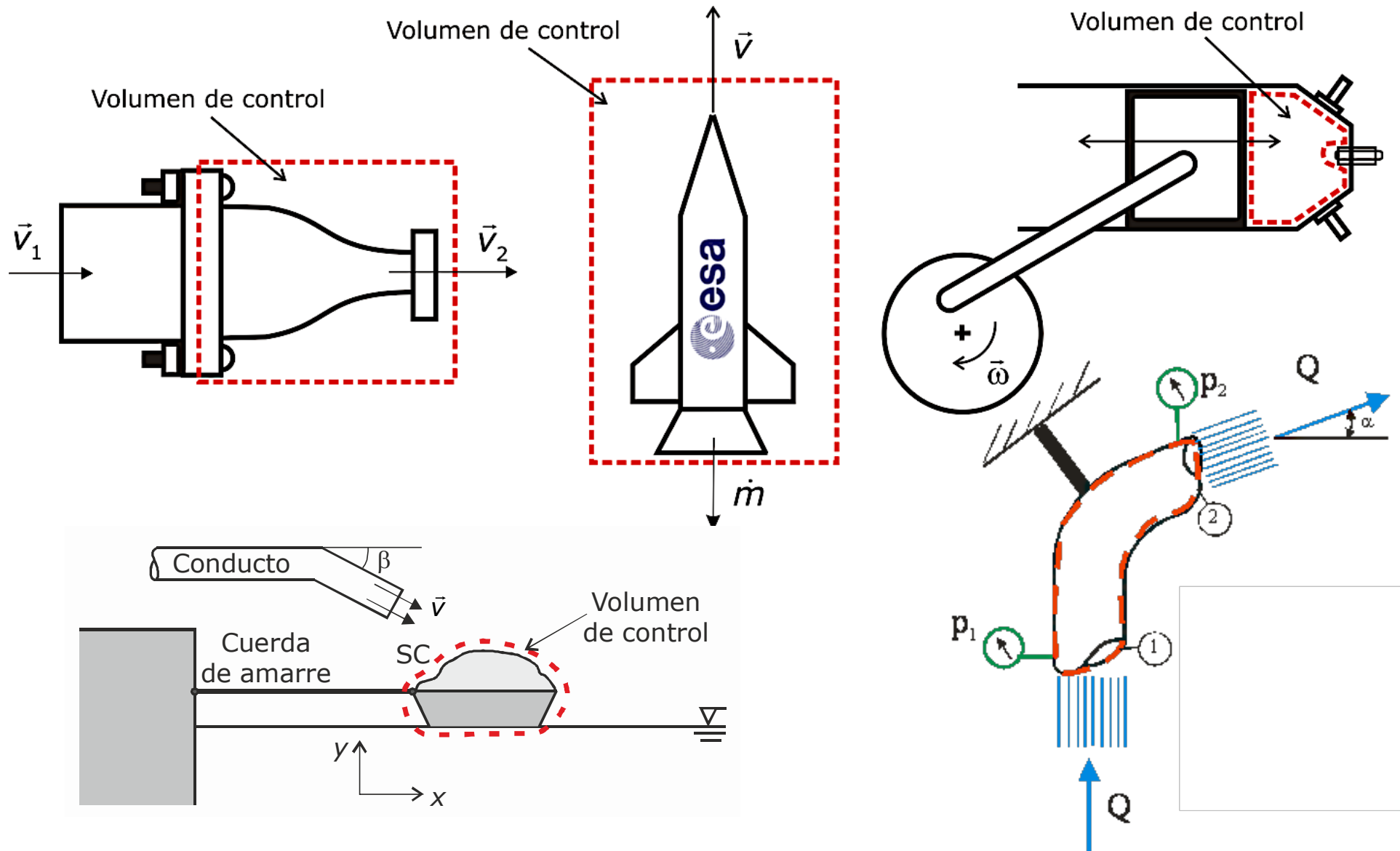
1.2 Sistemas y Volúmenes de Control

- **Volumen de control** (VC): zona del espacio definida en un dominio fluido (**punto de vista Euleriano**). Puede ser fijo, móvil o deformable.
- **Superficie de control** (SC): contorno del VC.
- **Sistema** (S): un conjunto de partículas de fluido en movimiento (**punto de vista Lagrangiano**). En un cierto instante pueden ocupar un VC definido.



1. Introducción: volúmenes de control

1.3 Sistemas y Volúmenes de Control, ejemplos



2. Ecuación de la continuidad

2.1 Conservación de la masa

- **Idea general** → “en un fluido en régimen permanente e incompresible, lo que entra es igual a lo que sale” :

$$\sum Q = 0$$

$$m_{\text{syst}} = \text{const}$$

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

2. Ecuación de la continuidad

2.1 Conservación de la masa

- La Ec. de continuidad se obtiene al imponer el ppio. de conservación de la masa en el movimiento de los fluidos

- En cada punto de la sección, en un tiempo dt , habrá atravesado cada ds :

$$\Delta Vol = V \cdot ds \cdot dt \quad \Longrightarrow \quad dVol = dt \cdot \int_{S1} V \cdot ds$$

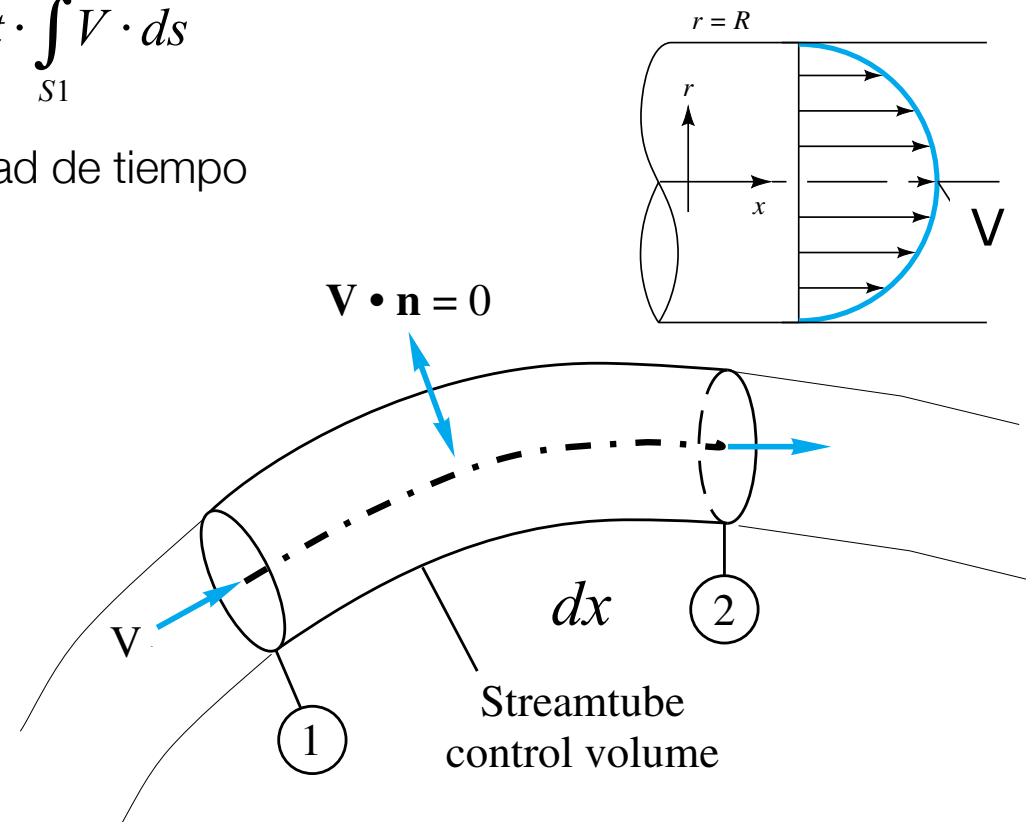
- Caudal: volumen que atraviesa S por unidad de tiempo

$$Q_1 = \frac{dVol}{dt} = \int_{S1} V \cdot ds$$

- W : velocidad media en la sección

$$W_1 = \frac{1}{S_1} \int_{S1} V \cdot ds$$

$$Q_1 = W_1 \cdot S_1$$



2. Ecuación de la continuidad

2.1 Conservación de la masa

- Masa en un instante determinado en VC: $masa = M_t = \rho \cdot S \cdot dx$
- Variación de la masa en VC en un dt (movimiento variable):

$$M_{t+dt} = \rho \cdot S \cdot dx + \frac{\partial(\rho \cdot S)}{\partial t} \cdot dt \cdot dx$$

- Masa que entra por S1 en dt: $dt \cdot \rho_1 \cdot Q_1 = \rho_1 \cdot W_1 \cdot S_1 \cdot dt$
- Masa que sale por S2 en dt: $dt \cdot \rho_2 \cdot Q_2 = \rho_2 \cdot W_2 \cdot S_2 \cdot dt$
- Masa saliente – masa entrante:

$$M_{S_2} - M_{S_1} = \rho_2 \cdot W_2 \cdot S_2 \cdot dt - \rho_1 \cdot W_1 \cdot S_1 \cdot dt = \frac{\partial(\rho \cdot W \cdot S)}{\partial x} \cdot dx \cdot dt$$

2. Ecuación de la continuidad

2.1 Conservación de la masa

- Igualando aumento en el tiempo con diferencia entre entrada y salida:

$$\frac{\partial(\rho \cdot S)}{\partial t} \cdot dt \cdot dx = - \frac{\partial(\rho \cdot W \cdot S)}{\partial x} \cdot dx \cdot dt$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho \cdot S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot W \cdot S)}{\partial x} = 0} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial(\rho \cdot S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot Q)}{\partial x} = 0}$$

2. Ecuación de la continuidad

2.2 Conservación de la masa: interpretación

- **Movimiento permanente:** la cantidad de masa fluida que atraviesa cada sección por unidad de tiempo es constante.

$$\cancel{\frac{\partial(\rho \cdot S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot W \cdot S)}{\partial x} = 0} \quad \frac{\partial(\rho \cdot W \cdot S)}{\partial x} = 0; \rightarrow \frac{\partial(\rho \cdot Q)}{\partial x} = 0; \rightarrow \rho \cdot Q = cte$$

cte. a lo largo el tubo

- **Fluido incompresible en movimiento variable y transitorio:**

$$\frac{\partial(\rho \cdot S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot W \cdot S)}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial(S)}{\partial t} + \frac{\partial(W \cdot S)}{\partial x} = 0; \rightarrow \frac{\partial(S)}{\partial t} + \frac{\partial(Q)}{\partial x} = 0$$

Si además el conducto es indeformable:

$$\cancel{\frac{\partial(S)}{\partial t} + \frac{\partial(Q)}{\partial x} = 0; \rightarrow \frac{\partial(Q)}{\partial x} = 0; \rightarrow Q = cte}$$

cte. a lo largo el tubo

El caudal en cada instante es idéntico en todas las secciones, variando en todas ellas simultáneamente con el tiempo (es decir, W varía en t).

2. Ecuación de la continuidad

2.2 Conservación de la masa: interpretación

- Fluido incompresible en movimiento permanente:

$$\cancel{\frac{\partial(\rho \cdot S)}{\partial t}} + \frac{\partial(\rho \cdot W \cdot S)}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial(W \cdot S)}{\partial x} = 0; \quad \text{Si } S = cte \rightarrow \frac{\partial(W)}{\partial x} = 0$$

El movimiento es uniforme

$$Q = cte$$

cte. a lo largo el tubo y en el tiempo

$$W = cte$$

El caudal es idéntico en todas las secciones y en todos los instantes de tiempo.

La velocidad es constante si, además, la sección es constante.

2. Ecuación de la continuidad

2.3 Conservación de la masa (formulación general)

- Tomamos como magnitudes extensiva C e intensiva c :

$$\begin{cases} C = m = \text{masa} \\ c = \frac{dC}{dVol} = \rho = \text{densidad} \end{cases}$$

- Teorema del Transporte de Reynolds → “variación de la masa en el sistema S = variación de la masa en el VC más el flujo másico neto a través de SC ”:

$$\frac{dm_S}{dt} = \frac{dm_{VC}}{dt} + \dot{m}_{SC} = \int_{VC} \frac{\partial C}{\partial t} d\mathcal{V} + \oint_{SC} C (\vec{v}_r \cdot d\vec{A}) ;$$

- Caso de un dominio sin reacciones químicas o físicas → masa del sistema de partículas = constante → **Ecuación Integral de Continuidad**:

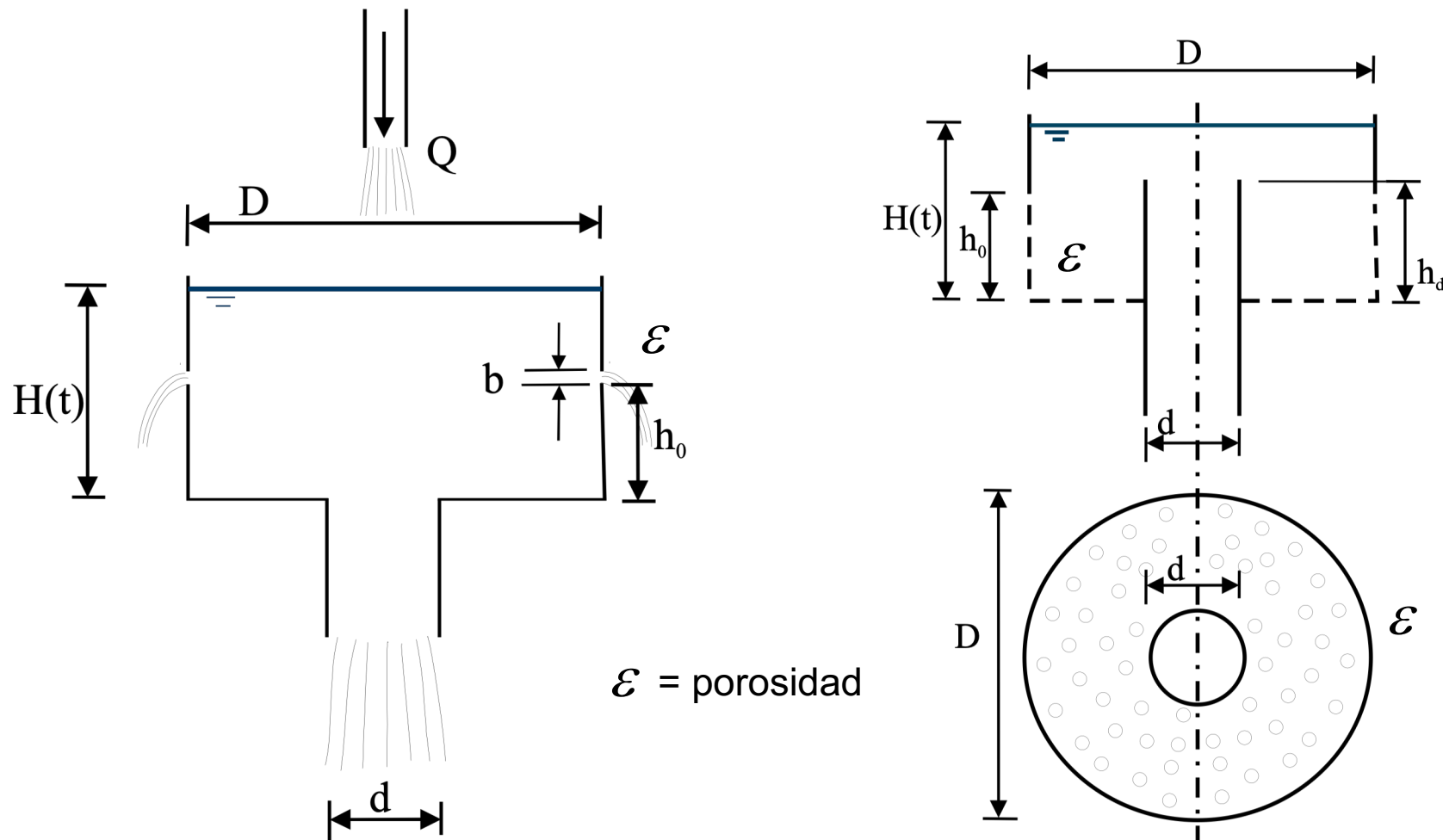
$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho d\mathcal{V} + \oint_{SC} \rho (\vec{v}_r \cdot d\vec{A}) = 0$$

2. Ecuación de la continuidad

2.4 Conservación de la masa: ejemplos

Ejemplo 1 → Evolución temporal del nivel de líquido en depósitos

a) Con franja lateral porosa y b) con paredes permeables



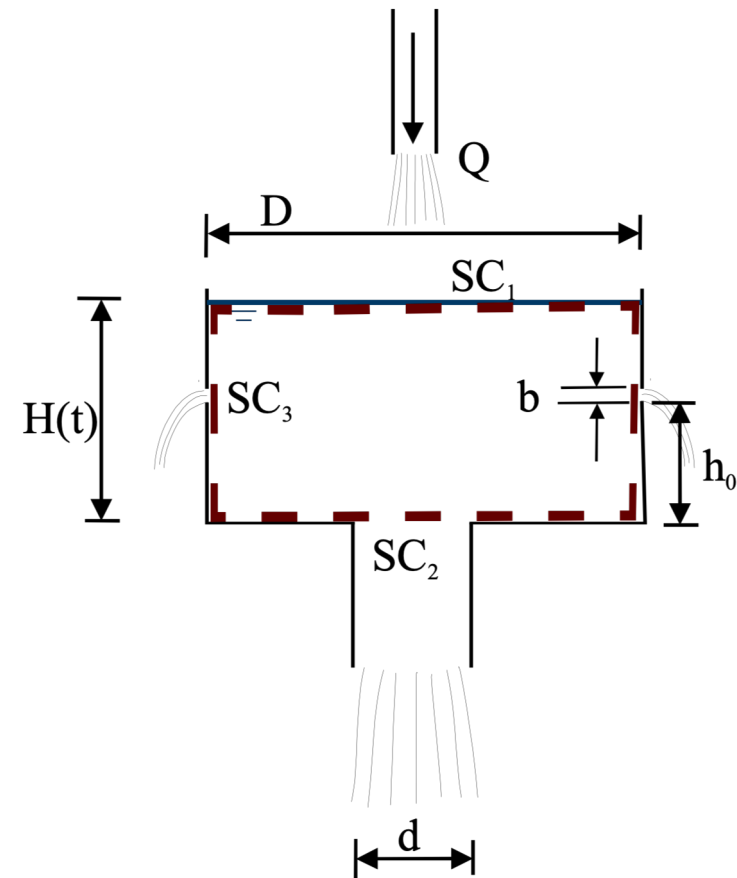
2. Ecuación de la continuidad

2.4 Conservación de la masa: ejemplos

Ejemplo 1 → evolución temporal del nivel de líquido en un depósito con franja lateral porosa:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho d\vartheta + \oint_{SC} \rho (\vec{v}_r \cdot d\vec{A}) = 0; \rightarrow \text{con} (\vec{v}_r \cdot d\vec{A}) = dQ$$

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho d\vartheta = \rho \frac{d\vartheta}{dt} = \rho \frac{\pi D^2}{4} \frac{dH(t)}{dt};$$



2. Ecuación de la continuidad

2.4 Conservación de la masa: ejemplos

Ejemplo 1 → evolución temporal del nivel de líquido en un depósito con franja lateral porosa:

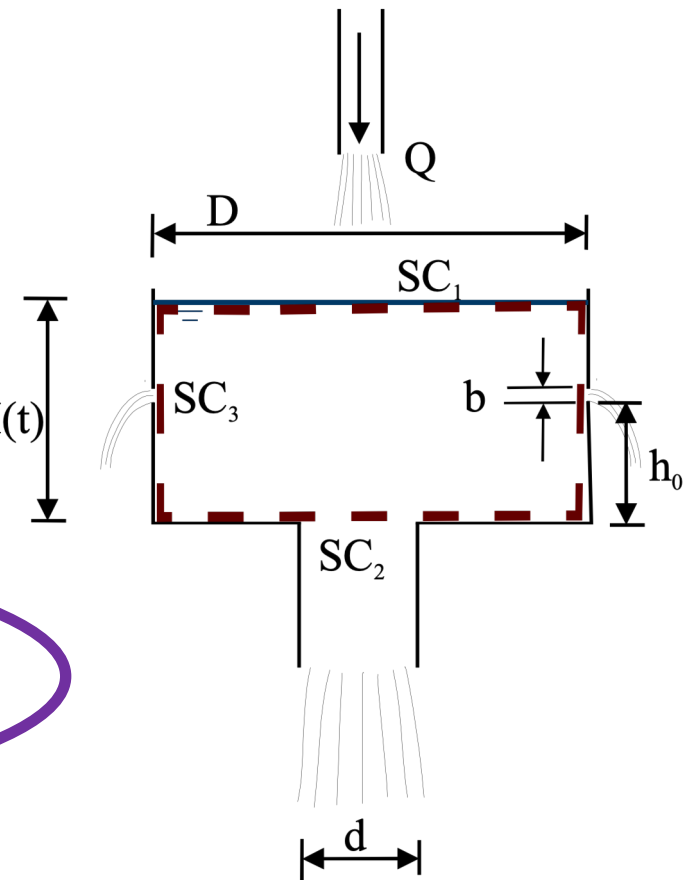
$$\oint_{SC} \rho (\vec{v}_r \cdot d\vec{A}) = \int_{SC1} \rho (\vec{v}_r \cdot d\vec{A}) + \int_{SC2} \rho (\vec{v}_r \cdot d\vec{A}) + \int_{SC3} \rho (\vec{v}_r \cdot d\vec{A}) =$$

$$= -\rho Q + \rho v_{SC2} A_{SC2} + \rho v_{SC3} A_{SC3} =$$

$$= -\rho Q + \rho \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gH(t)} + \rho \pi D \varepsilon b \sqrt{2g(H(t) - h_0)} ; H(t)$$

$$\frac{dH}{dt} = + \frac{4Q}{\pi D^2} - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gH} - \frac{4\varepsilon b}{D} \sqrt{2g(H - h_0)}$$

$$S + \Delta(+)-E = 0$$



3. Ecuación de la cantidad de movimiento

3.1 Conservación de la cantidad de movimiento

- Distancia 1 – 1': $W_1 \cdot dt$; Distancia 2 – 2': $W_2 \cdot dt$
- Cantidad de movimiento:

$$p = m \cdot \vec{V}$$

- Cantidad de movimiento Volumen A:

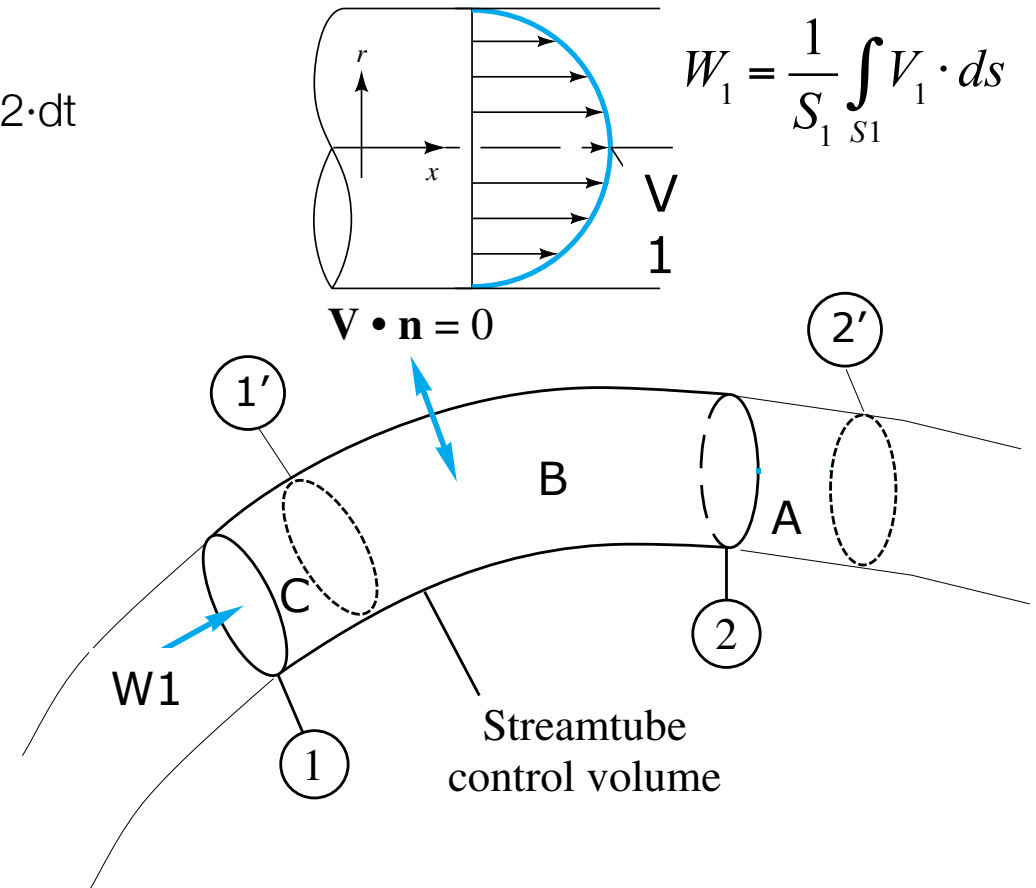
$$\rho_2 \cdot (S_2 \cdot W_2 \cdot dt) \cdot \vec{W}_2$$

- Cantidad de movimiento Volumen C:

$$\rho_1 \cdot (S_1 \cdot W_1 \cdot dt) \cdot \vec{W}_1$$

- Aumento Cantidad de movimiento Volumen B en el tiempo dt:

$$dP_B(t) = \rho \cdot dVol \cdot \vec{V}; \quad \Rightarrow \quad dP_{VOL} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{VOL} \rho \cdot \vec{V} \cdot dVol \right) \cdot dt$$



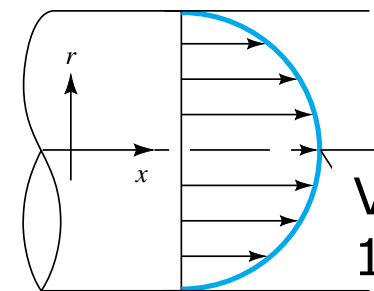
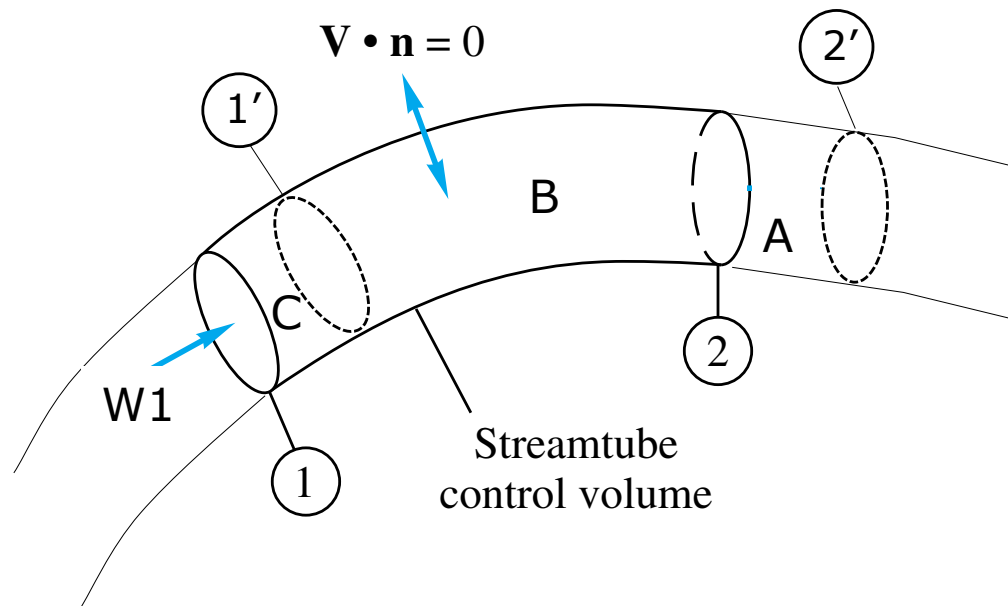
3. Ecuación de la cantidad de movimiento

3.1 Conservación de la cantidad de movimiento

- Según el teorema de la cantidad de movimiento (2ª ley de Newton):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{V})$$

$$\vec{F} = \rho_2 \cdot (S_2 \cdot W_2) \cdot \vec{W}_2 - \rho_1 \cdot (S_1 \cdot W_1) \cdot \vec{W}_1 + \frac{\partial}{\partial t} \int_{VOL} \rho \cdot \vec{V} \cdot dVol$$



$$W_1 = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} V_1 \cdot ds$$

$$Q_1 = W_1 \cdot S_1$$

3. Ecuación de la cantidad de movimiento

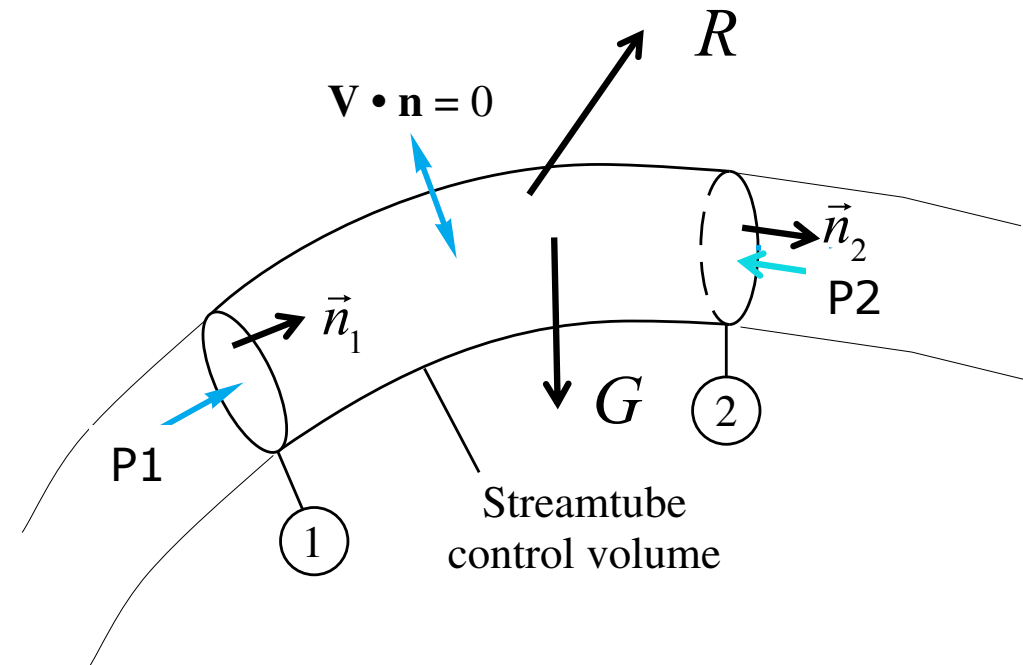
3.1 Conservación de la cantidad de movimiento

- Las fuerzas internas debidas a las tensiones (presión y viscosas) se anulan entre sí.

- Las fuerzas exteriores son:

- El peso G .
- La reacción R de los contornos 1-2.
- Fuerzas de presión en las caras 1 y 2:

$$P_1 \cdot S_1 \cdot \vec{n}_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot \vec{n}_2$$



- Igualando fuerzas, en régimen permanente:

$$\vec{R} + \vec{G} = (\rho_2 \cdot S_2 \cdot W_2^2 + P_2 \cdot S_2) \cdot \vec{n}_2 - (\rho_1 \cdot S_1 \cdot W_1^2 + P_1 \cdot S_1) \cdot \vec{n}_1$$

3. Ecuación de la cantidad de movimiento

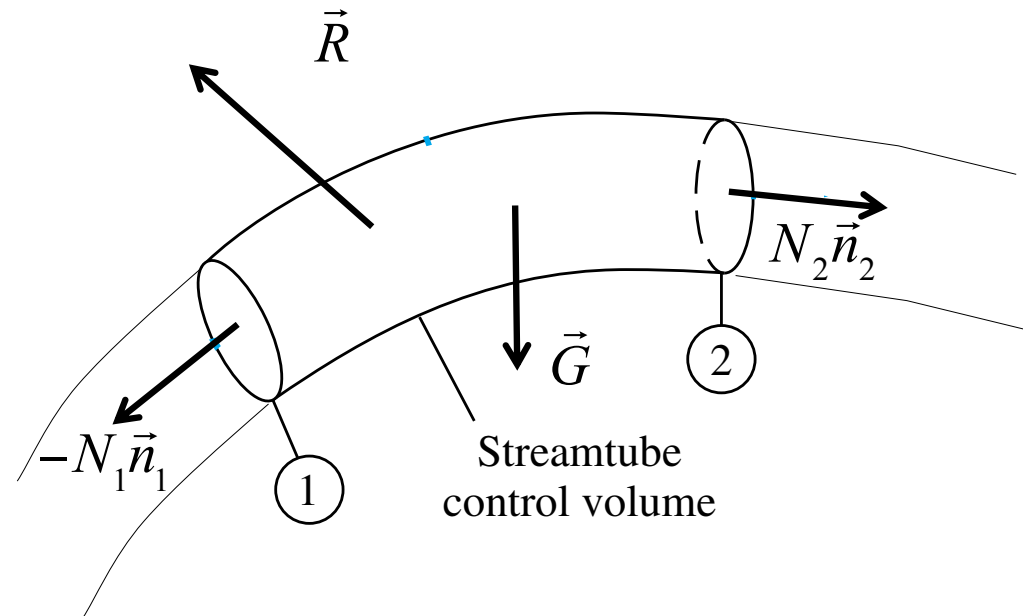
3.1 Conservación de la cantidad de movimiento

$$\vec{R} + \vec{G} = \left(\rho_2 \cdot S_2 \cdot W_2^2 + P_2 \cdot S_2 \right) \cdot \vec{n}_2 - \left(\rho_1 \cdot S_1 \cdot W_1^2 + P_1 \cdot S_1 \right) \cdot \vec{n}_1$$

- **Impulsión** en una sección:

$$N = \left(\rho \cdot S \cdot W^2 + P \cdot S \right)$$

$$\vec{R} + \vec{G} = \left(N_2 \right) \cdot \vec{n}_2 - \left(N_1 \right) \cdot \vec{n}_1$$



- La resultante de la impulsión (con los sentidos hacia el exterior del volumen considerado) es igual a la resultante de la reacción de los contornos sobre el fluido más el peso.

3. Ecuación de la cantidad de movimiento

3.2 Conservación de la cantidad de movimiento (formulación general)

- Magnitudes extensiva C e intensiva c :

$$\begin{cases} C = \overline{CM} = \int_V \vec{v} \cdot dm = \text{cantidad de movimiento} \\ c = \frac{d\overline{CM}}{dV} = \rho \vec{v} \end{cases}$$

- Teorema del Transporte de Reynolds \rightarrow “variación de la CM en el sistema S = variación de la CM en el VC más el flujo neto de CM a través de SC”:

$$\frac{d\overline{CM}_S}{dt} = \frac{d\overline{CM}_{VC}}{dt} + \Phi_{CM,SC} = \int_{VC} \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} d\vartheta + \oint_{SC} \vec{C} \cdot (\vec{v}_r \cdot d\vec{A}) ;$$

donde: \vec{v} = velocidad de las partículas respecto a un sistema de referencia
 \vec{v}_r = velocidad de las partículas respecto al $d\vec{A}$ que atraviesan

- Para un Sistema de Referencia Inercial (estático o móvil con velocidad cte.) \rightarrow 2ª Ley de Newton: “variación de la CM de un sistema = sumatorio de fuerzas que actúan sobre el sistema” \rightarrow **Ec. Integral de Cantidad de Movimiento:**

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{v} d\vartheta + \oint_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v}_r \cdot d\vec{A}) = \sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{VOL} + \sum \vec{F}_{SUP}$$

3. Ecuación de la cantidad de movimiento

3.3 Conservación de la cantidad de movimiento (correcciones)

- Hipótesis que se realizaron:
 - Velocidad cte. en la sección definida por W , velocidad media.
 - Presión cte. en la sección.
- **Impulsión real** en una sección:

$$N = \int_S \rho \cdot V^2 dS + \int_S P dS$$

- Si definimos: coeficiente de cantidad de movimiento $\beta = \frac{\int V^2 dS}{W^2 S}$
- presión media $\bar{P} = \frac{\int P dS}{S}$

3. Ecuación de la cantidad de movimiento

3.3 Conservación de la cantidad de movimiento (correcciones)

- **Impulsión real** en una sección:

$$N = \rho \cdot \beta \cdot W^2 \cdot S + \bar{P} \cdot S$$

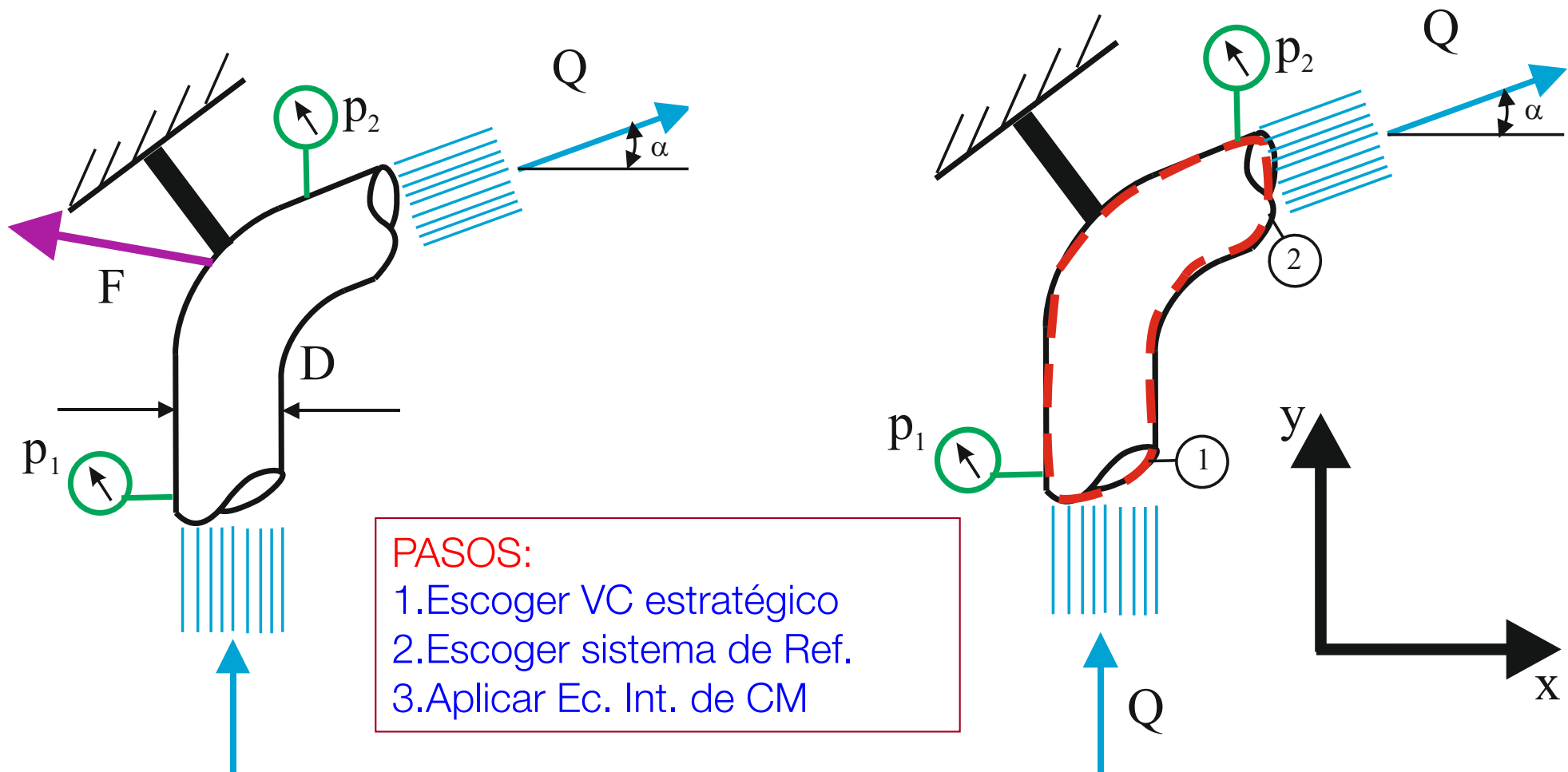
Elemento	Flujo	β
Tubería	Laminar	4/3
Tubería	Turbulento	1.005-1.05
Canal regular		1.03-1.07
Canal natural		1.05-1.17
Río en valle de inundación		1.17-1.33

- Comprobación de las hipótesis que se realizaron:
 - β es aproximadamente 1 en régimen turbulento.
 - La presión media difiere muy poco de la que reina en la mitad de la sección.

3. Ecuación de la cantidad de movimiento

3.4 Conservación de la cantidad de movimiento: ejemplos

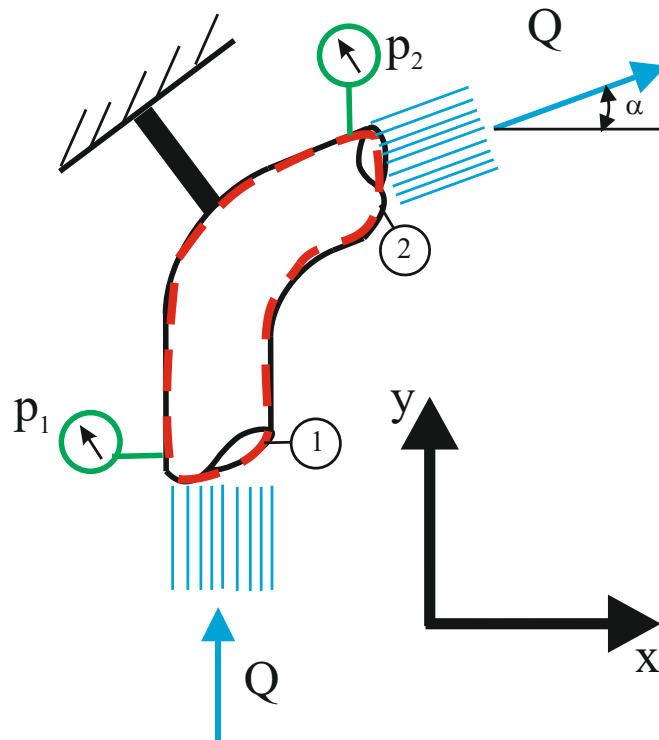
Ejemplo 2 → Fuerza de reacción en un codo de tubería:



3. Ecuación de la cantidad de movimiento

3.4 Conservación de la cantidad de movimiento: ejemplos

Ejemplo 2 → Fuerza de reacción en un codo de tubería:



$$Q_1 = Q_2 = Q \Rightarrow v_1 = v_2 ;$$

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \frac{4Q}{\pi D^2} \vec{j} \\ \vec{v}_2 = \frac{4Q}{\pi D^2} (\cos \alpha \vec{i} + \text{sen} \alpha \vec{j}) \end{cases}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \vec{v} d\vartheta + \oint_{SC} \rho \vec{v} (\vec{v}_r \cdot d\vec{A});$$

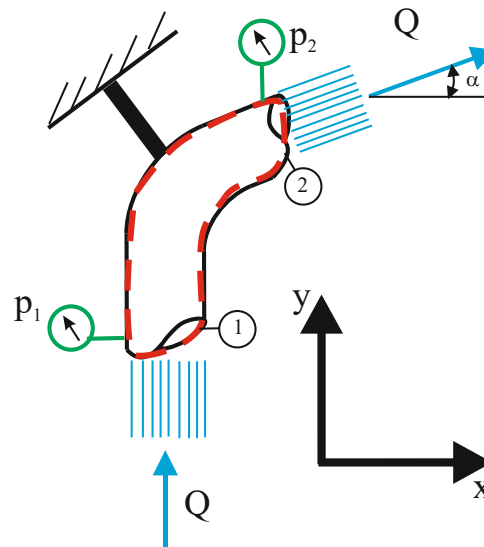
3. Ecuación de la cantidad de movimiento

3.4 Conservación de la cantidad de movimiento: ejemplos

Ejemplo 2 → Fuerza de reacción en un codo de tubería:

$$F_x - p_2 \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) \cos \alpha = \oint_{SC} \rho \cdot v_x (\vec{v}_r \cdot d\vec{A}) = \rho \left(\frac{4Q}{\pi D^2} \cos \alpha \right) Q = \frac{4\rho Q^2 \cos \alpha}{\pi D^2};$$

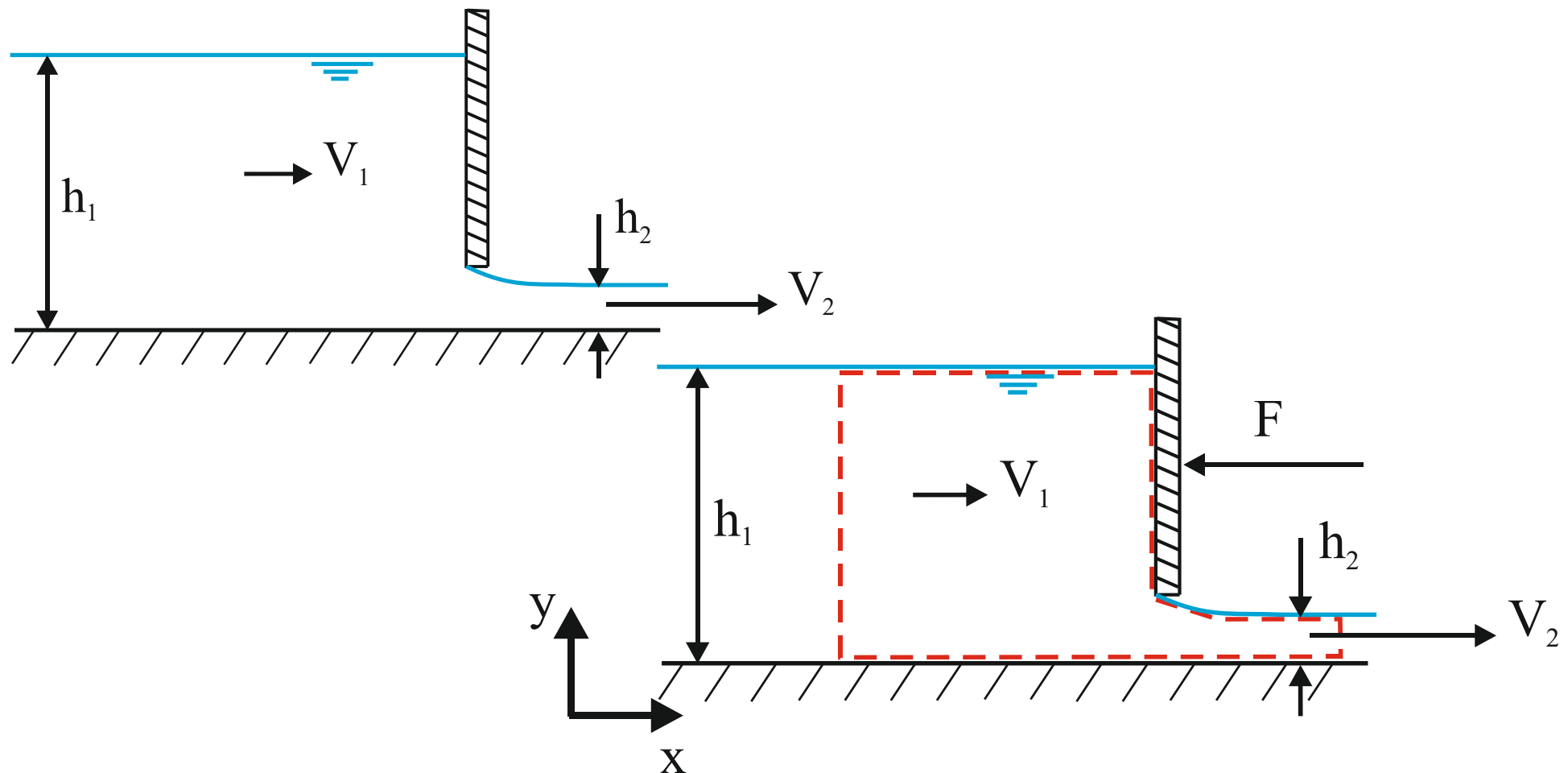
$$F_y + p_1 \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) - p_2 \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) \text{sen} \alpha = \oint_{SC} \rho \cdot v_y (\vec{v}_r \cdot d\vec{A}) = -\rho \left(\frac{4Q}{\pi D^2} \right) Q + \rho \left(\frac{4Q}{\pi D^2} \text{sen} \alpha \right) Q = \frac{4\rho Q^2 (\text{sen} \alpha - 1)}{\pi D^2};$$



3. Ecuación de la cantidad de movimiento

3.4 Conservación de la cantidad de movimiento: ejemplos

Ejemplo 3 → Fuerza de reacción en la pared de una compuerta:

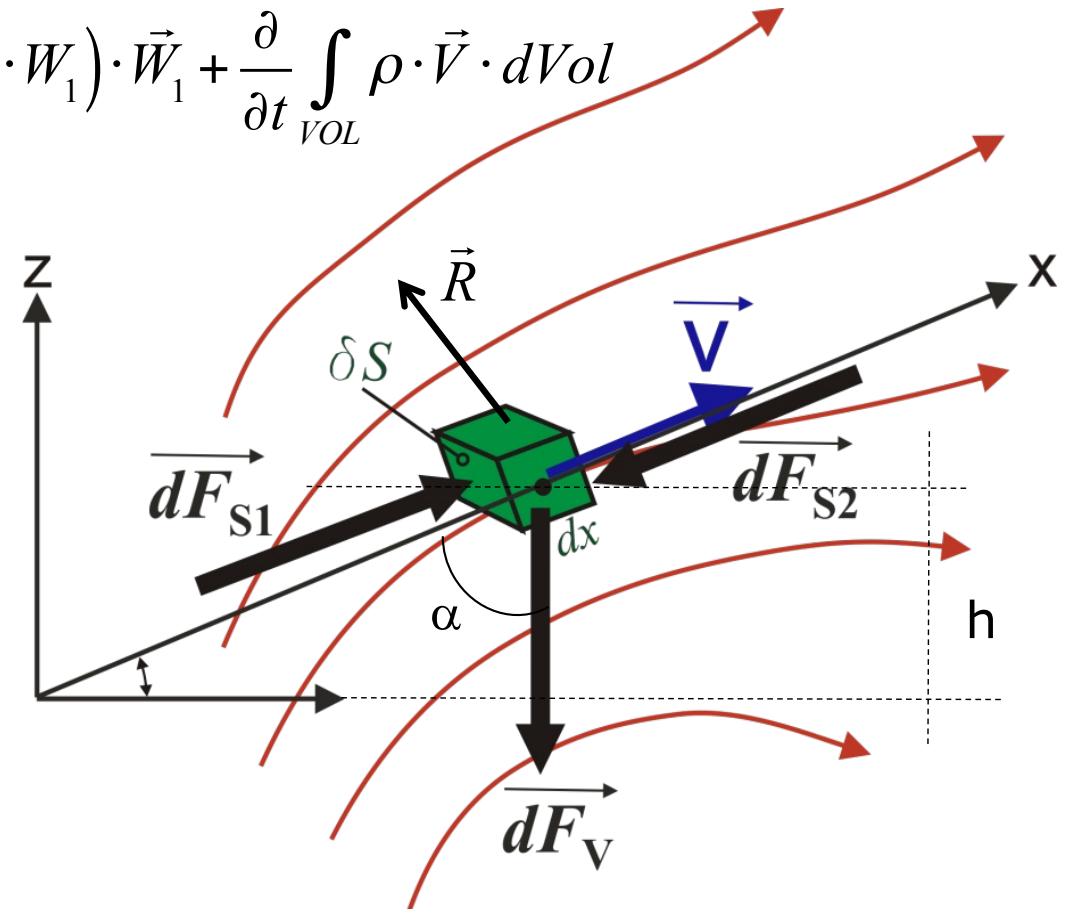
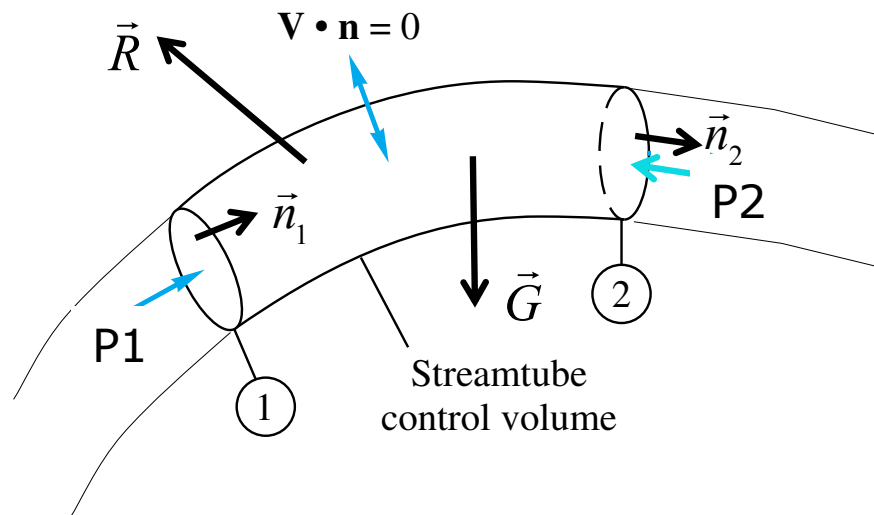


4. Teorema de Bernoulli

4.1 Ecuación de Bernoulli

- **Ecuación de Cantidad de Movimiento** (2ª Ley de Newton) proyectada sobre una línea de corriente, para una partícula dS en la dirección de su desplazamiento instantáneo \mathbf{x} (coordenada curvilínea).

$$\vec{F} = \rho_2 \cdot (S_2 \cdot W_2) \cdot \vec{W}_2 - \rho_1 \cdot (S_1 \cdot W_1) \cdot \vec{W}_1 + \frac{\partial}{\partial t} \int_{VOL} \rho \cdot \vec{V} \cdot dVol$$



4. Teorema de Bernoulli

4.1 Ecuación de Bernoulli

Proyección de Fuerzas externas F: peso G, reacción en los contornos R y fuerzas de presión en las caras, Fs:

- Peso, G: $-\rho \cdot g \cdot dS \cdot dx \cdot \cos \alpha = -\rho \cdot g \cdot dS \cdot dh$; $\cos \alpha = \frac{dh}{dx}$
- Fuerzas presión en las caras, Fs: $P \cdot dS$ y $-P \cdot dS - \frac{\partial(PdS)}{\partial x} dx$; dF_{S1} y dF_{S2}
- Reacción, R en los contornos del fluido: $\left[\begin{array}{l} -\bar{\tau} \cdot dpe \cdot dx + P \cdot \frac{\partial(dS')}{\partial y} dy ; \\ \text{siendo } dpe \text{ el perímetro, y } \bar{\tau} \text{ la tensión media} \end{array} \right.$

Proyección del segundo miembro:

$$\frac{\partial(\rho \cdot V^2 \cdot dS)}{\partial x} dx + \frac{\partial(\rho \cdot V \cdot dS)}{\partial t} dx = V \cdot dx \cdot \frac{\partial(\rho \cdot V \cdot dS)}{\partial x} + \rho \cdot V \cdot dS \cdot \frac{\partial V}{\partial x} dx + V \cdot dx \cdot \frac{\partial(\rho \cdot dS)}{\partial t} + \rho \cdot dS \cdot \frac{\partial V}{\partial t} dx$$

- Según la ecuación de continuidad de la masa: $\frac{\partial(\rho \cdot S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot W \cdot S)}{\partial x} = 0$

$$-\rho \cdot g \cdot dS \cdot dh - \frac{\partial(P)}{\partial x} dS \cdot dx - \bar{\tau} \cdot dpe \cdot dx = \rho \cdot V \cdot dS \cdot \frac{\partial V}{\partial x} dx + \rho \cdot dS \cdot \frac{\partial V}{\partial t} dx$$

Dividiendo por $ds \cdot dx$ y considerando $\gamma = \rho \cdot g$:

4. Teorema de Bernoulli

4.1 Ecuación de Bernoulli

Ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de corriente:

$$\gamma \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{\partial V^2}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \bar{\tau} \cdot \frac{dpe}{dS} = 0$$

- Si el fluido es incompresible, $\rho = cte$:

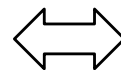
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2 \cdot g} \right) + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\bar{\tau}}{\gamma} \cdot \frac{dpe}{dS} = 0$$

- Si además, el movimiento es permanente, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2 \cdot g} \right) + \frac{\bar{\tau}}{\gamma} \cdot \frac{dpe}{dS} = 0$$

- Si además, el fluido es ideal o perfecto, $\bar{\tau} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2 \cdot g} \right) = 0$$



$$h + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2 \cdot g} = cte$$

4. Teorema de Bernoulli

4.1 Ecuación de Bernoulli

El trinomio de Bernoulli resulta constante a lo largo de una línea de corriente si el fluido es incompresible, el movimiento es permanente y el fluido es ideal o perfecto.

$$h + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2 \cdot g} = cte$$

$$\rho = cte$$

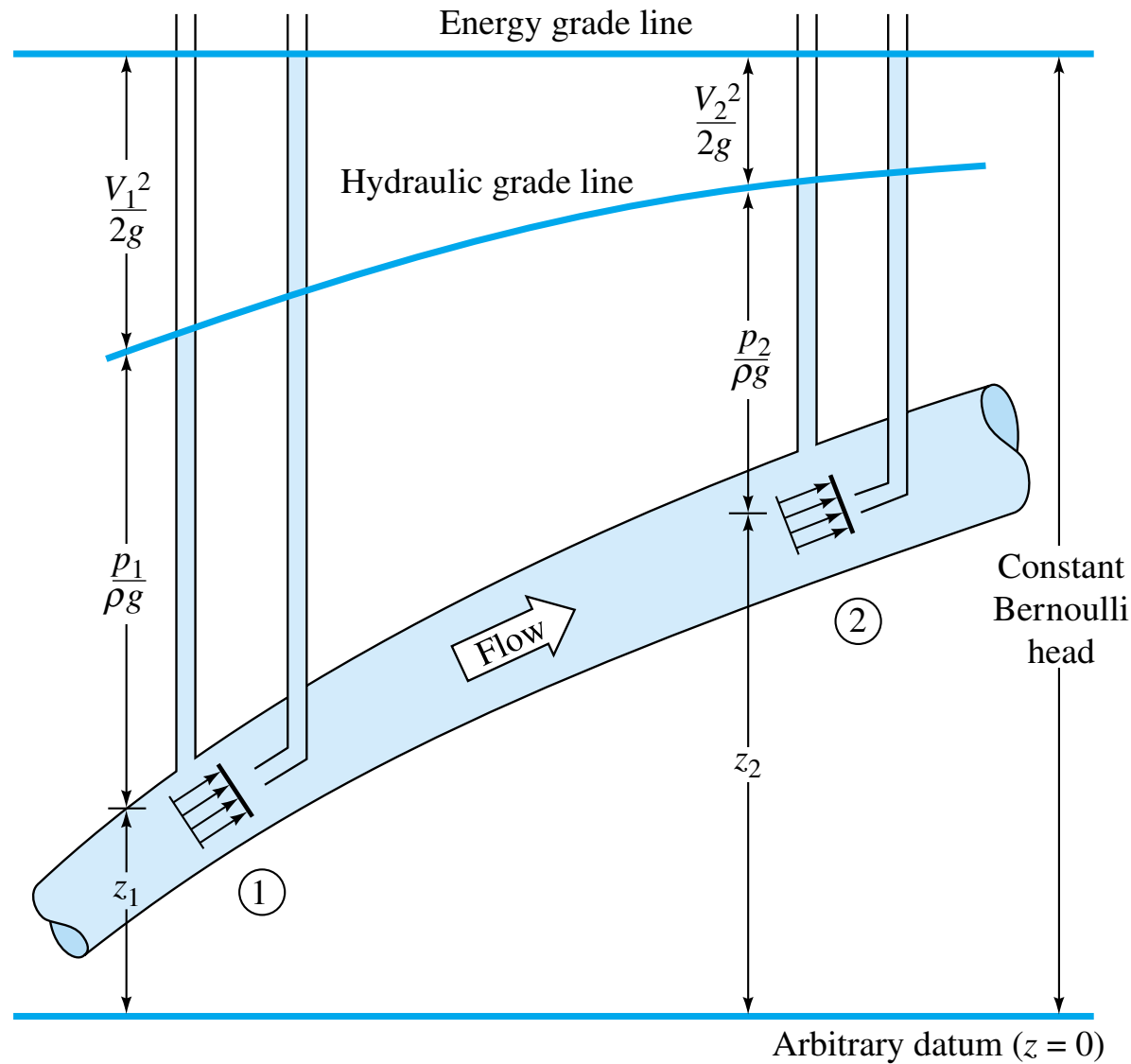
$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$\bar{\tau} = 0$$

El trinomio de Bernoulli también resulta constante en todo punto de un fluido perfecto en movimiento permanente que haya partido del reposo...

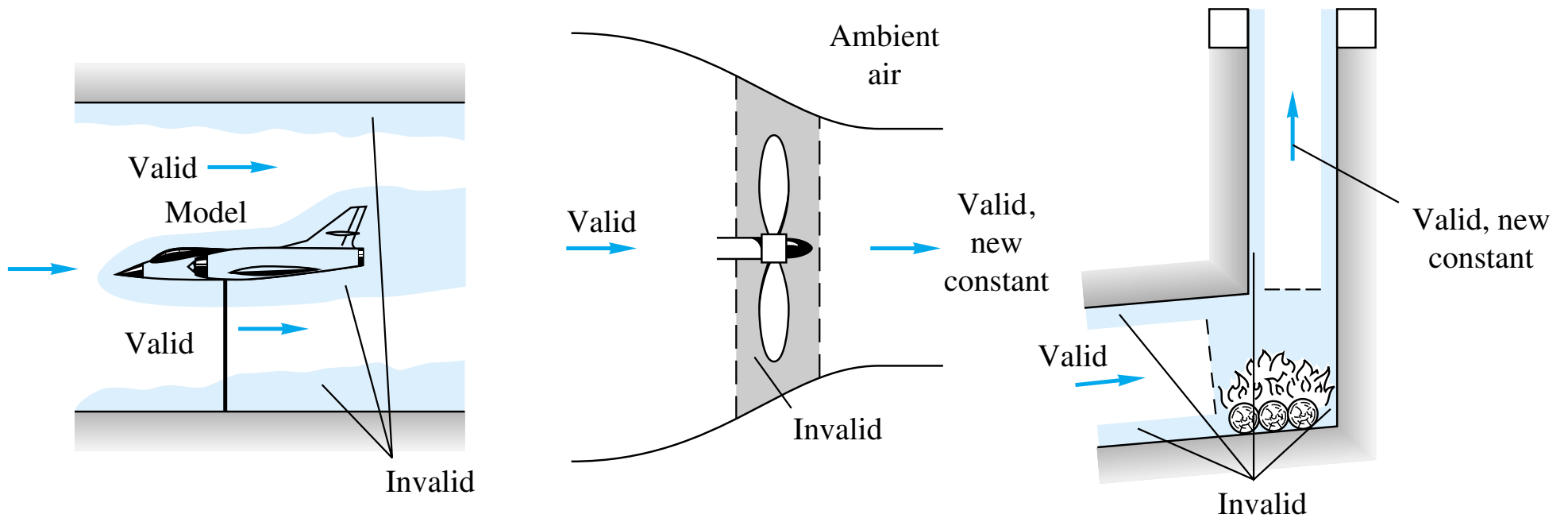
4. Teorema de Bernoulli

4.1 Ecuación de Bernoulli



4. Teorema de Bernoulli

4.2 Ecuación de Bernoulli: rango de validez



4. Teorema de Bernoulli

4.3 Pérdidas de carga

- Para un fluido real, $\bar{\tau} \neq 0$, e incompresible, $\rho = cte$, y en movimiento permanente, existirán pérdidas de carga hp a lo largo del movimiento:

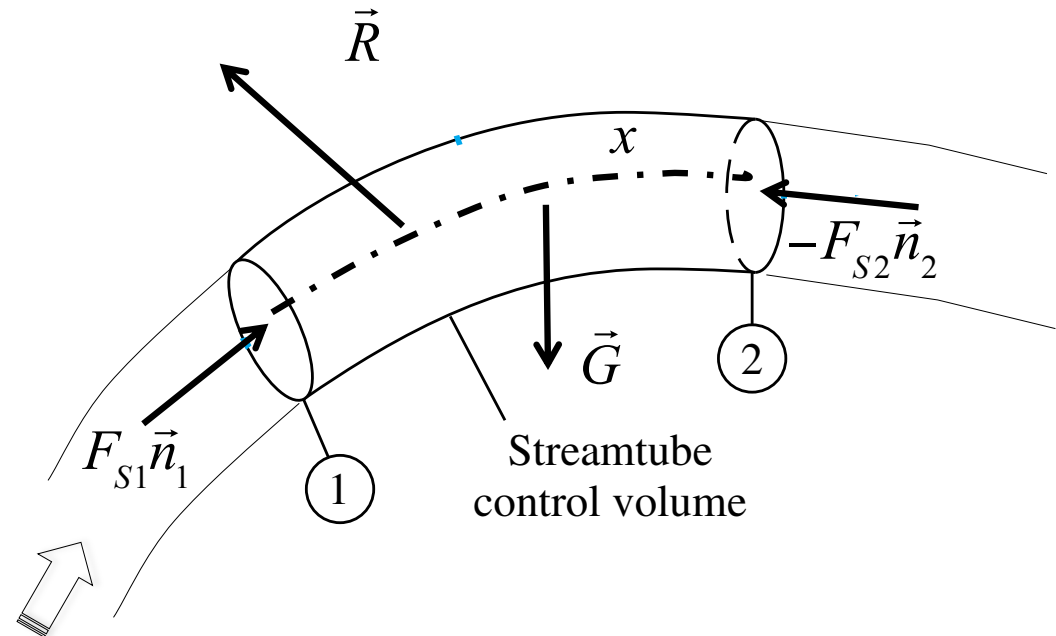
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2 \cdot g} \right) + \frac{\bar{\tau}}{\gamma} \cdot \frac{dpe}{dS} = 0$$

- Integrando entre 1 y 2 a lo largo de x :

$$h + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2 \cdot g} \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{\bar{\tau}}{\gamma} \frac{dpe}{dS} \cdot dx = 0$$

$$h + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2 \cdot g} \Big|_1^2 + hp = 0$$

$$h_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = h_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + hp$$



4. Teorema de Bernoulli

4.3 Pérdidas de carga

$$h_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} = h_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + hp$$

$$H_1 = H_2 + hp$$

→ Unidades de energía por unidad de peso
[= J/N = m]

- H: carga, carga hidráulica o altura de energía (trinomio Bernoulli).

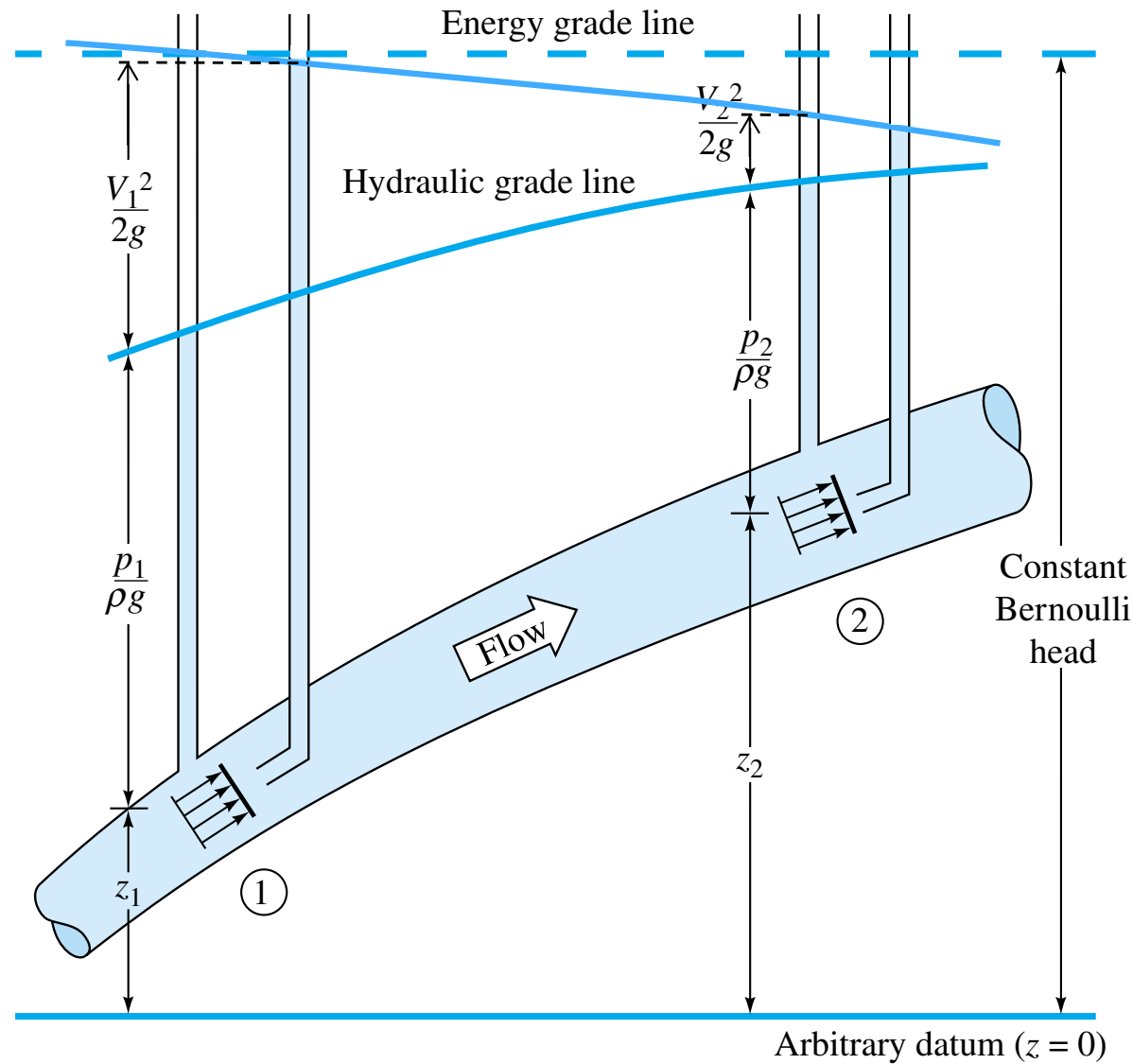
- $h + \frac{P}{\gamma}$: cota piezométrica.

- hp: pérdida de carga, $hp = \int_1^2 \frac{\bar{\tau}}{\gamma} \frac{dpe}{dS} \cdot dx$

- l: pérdida de carga por unidad de longitud, $hp = \int_1^2 I \cdot dx$

4. Teorema de Bernoulli

4.3 Pérdidas de carga



4. Teorema de Bernoulli

4.4 Ecuación de Bernoulli: interpretación

Ecuación de conservación de Energía Mecánica a lo largo del recorrido de una partícula, bajo la condición de flujo ideal.

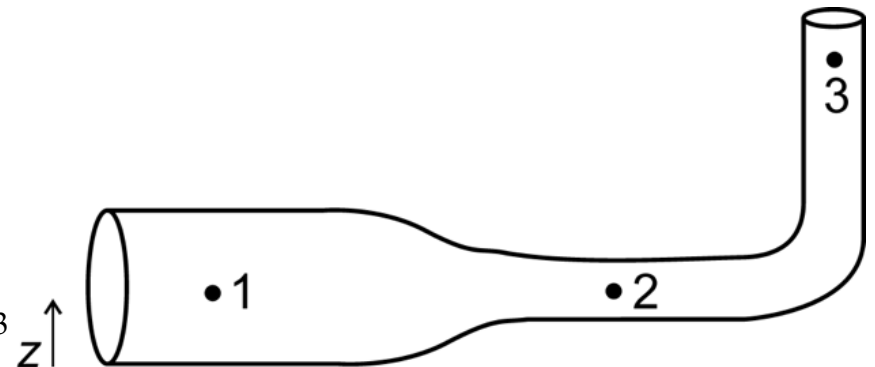
- Términos de energía mecánica: en. cinética, en. potencial gravitatoria y en. potencial de presión.

- **Ejemplo:** tubería con cambios de sección y cota, operando con caudal constante:

- Flujo incompresible ($\rho = \text{cte}$) por tubería, con caudal Q constante : $Q = v \cdot S = \text{cte}$.

- Entre 1 y 2:
$$\left\{ \begin{array}{l} S_2 < S_1 \Rightarrow v_2 > v_1 \\ z_1 = z_2 \end{array} \right\} \Rightarrow p_2 < p_1$$

- Entre 2 y 3:
$$\left\{ \begin{array}{l} S_2 = S_3 \Rightarrow v_2 = v_3 \\ z_2 < z_3 \end{array} \right\} \Rightarrow p_2 > p_3$$



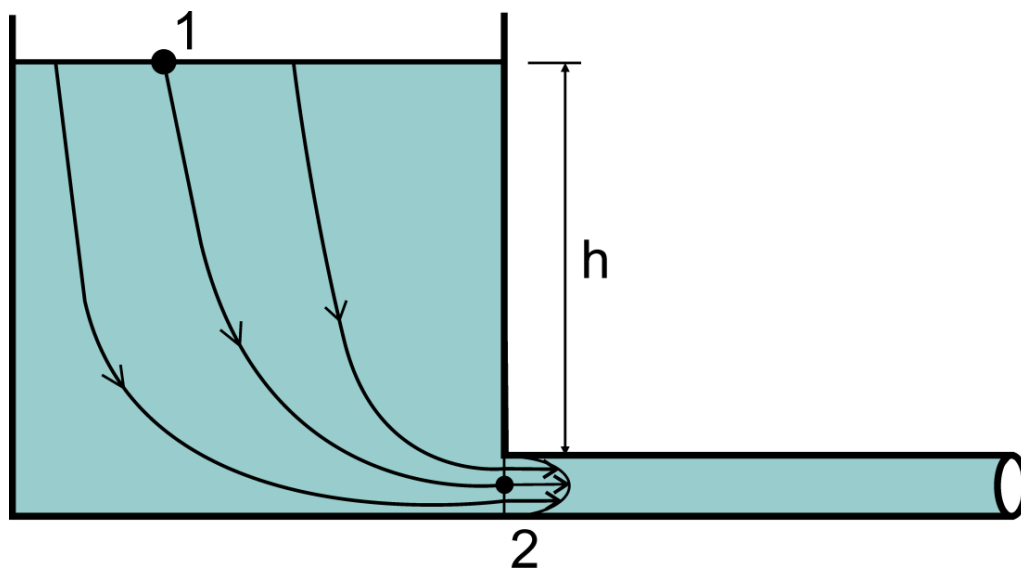
- **Caso de flujo real:**

- La altura de energía va disminuyendo a lo largo de las líneas de corriente.
- Pérdida de carga: $h_p = H_1 - H_2 \geq 0$

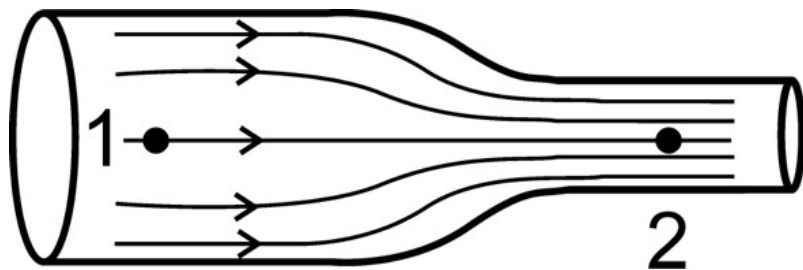
4. Teorema de Bernoulli

4.5 Ecuación de Bernoulli: ejemplos

Ejemplo 4 → Flujo de descarga desde depósito:



- **Caso análogo:** estrechamiento en conducto



- Entre **1** y **2**: flujo se acelera y líneas de corriente convergentes y bien definidas → **ec. Bernoulli funciona bien**

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$



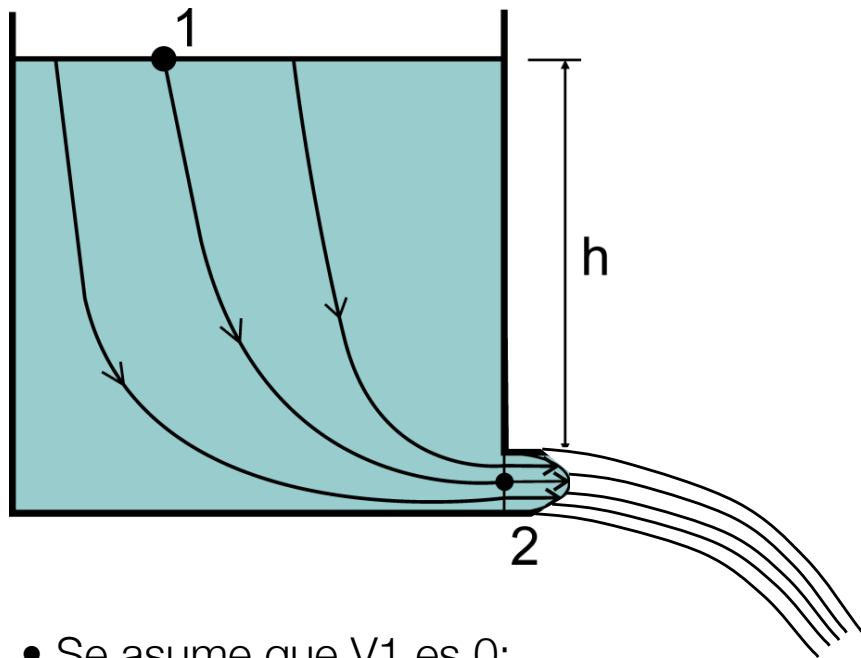
$$p_2 = \rho g h - \frac{\rho}{2} v_2^2$$

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} (v_1^2 - v_2^2) \quad \text{con} \quad v_1 < v_2$$

4. Teorema de Bernoulli

4.5 Ecuación de Bernoulli: ejemplos

Ejemplo 5 → Flujo de descarga a atmósfera libre:



- Se asume que V_1 es 0:

Conservación de la masa: $A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2$ y $A_1 \gg A_2$

- Entre 1 y 2: flujo se acelera y líneas de corriente convergentes y bien definidas → **ec. Bernoulli funciona bien**

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$



$$0 = \rho g h - \frac{\rho}{2} v_2^2$$

- **Fórmula de Torricelli**

$$v \approx \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

4. Teorema de Bernoulli

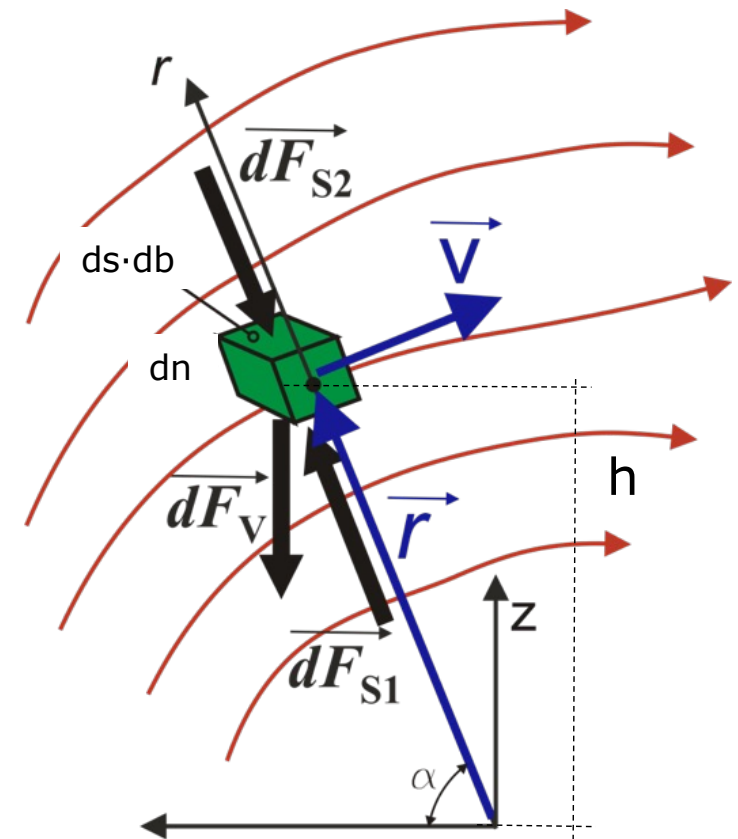
4.6 Ecuación de la dinámica según la normal a la línea de corriente

- **Balance de Cantidad de Movimiento** (2ª Ley de Newton) para una partícula, proyectada en la dirección de su radio de curvatura instantáneo r (que es perpendicular al vector velocidad). Distribución transversal de presión.
- **Flujo ideal** $\vec{\tau} = 0$ (y real si $\vec{\tau} \parallel \vec{v}$).
- **Movimiento permanente.**

Fuerzas de inercia + Fuerzas de presión + Fuerzas de peso = 0;

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad dF_{S,r} = dF_{S2} - dF_{S1} = \\
 & = P \cdot ds \cdot db - \left(P + \frac{\partial P}{\partial n} dn \right) \cdot ds \cdot db = -\frac{\partial P}{\partial n} dn \cdot ds \cdot db \\
 & \bullet \quad dF_{V,r} = -g \cdot \rho \cdot dn \cdot ds \cdot db \cdot \frac{\partial h}{\partial n} \\
 & \bullet \quad dF_i = -dm \cdot \frac{V^2}{r} = -\rho \cdot dn \cdot ds \cdot db \cdot \frac{V^2}{r}
 \end{aligned}$$

Dividiendo por $dVol = dn \cdot ds \cdot db$ y considerando $\gamma = \rho \cdot g$:



4. Teorema de Bernoulli

4.6 Ecuación de la dinámica según la normal a la línea de corriente

$$\rho \cdot \frac{V^2}{r} + \frac{\partial P}{\partial n} + \gamma \cdot \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Si el fluido es incompresible: } \frac{V^2}{g \cdot r} = - \frac{\partial}{\partial n} \left(h + \frac{P}{\gamma} \right) \end{array} \right.$$

$$\frac{V^2}{g \cdot r} = - \frac{\partial}{\partial n} \left(h + \frac{P}{\gamma} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Si las líneas de corriente son rectas en las secciones normales a ellas (o } r \text{ es muy grande): } h + \frac{P}{\gamma} = cte \\ \bullet \text{ Si la altura es constante: } \rho \cdot \frac{V^2}{r} = - \frac{\partial P}{\partial n} \quad \left(\rho \frac{v^2}{r} > 0 \right) \\ \bullet \text{ Si la altura es constante y el radio infinito: } \frac{\partial P}{\partial n} = 0 \end{array} \right.$$

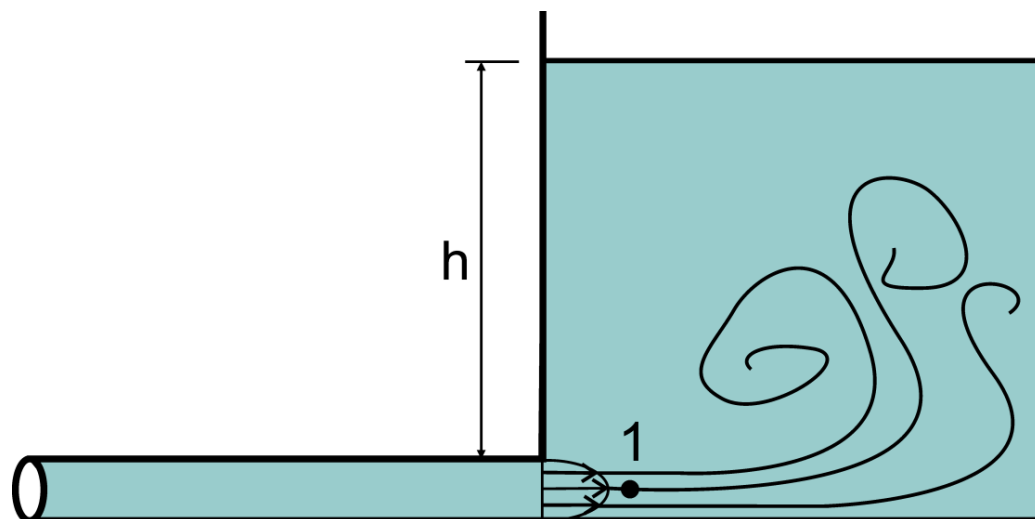
- La presión crece con la posición radial y es mínima en el centro de curvatura
- La presión varía tanto más rápido cuanto mayor es v^2 y menor es r
- Si el movimiento es rectilíneo → no hay variación transversal de presión (*)

(*) Aunque la presión no varíe transversalmente, el módulo de la velocidad sí puede variar.

4. Teorema de Bernoulli

4.6 Ecuación de la dinámica según la normal a la línea de corriente

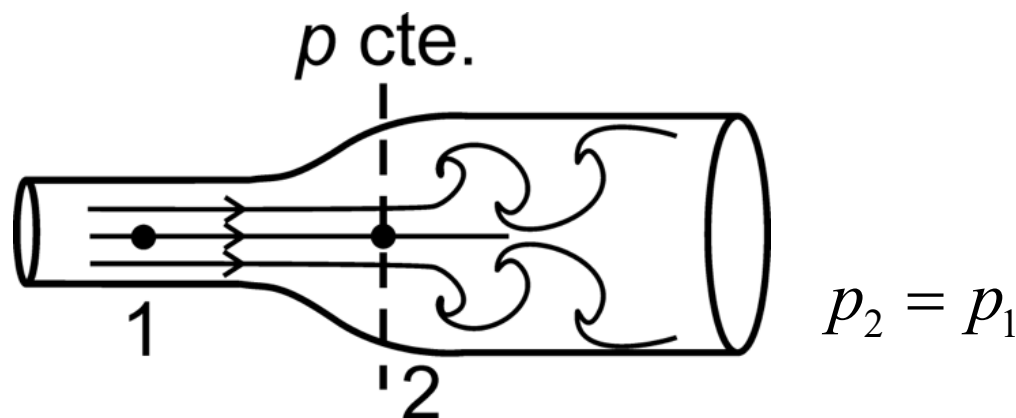
Ejemplo 6 → Flujo de entrada a depósito:



- En **1** el flujo tiene alta energía cinética que se disipa en el depósito → líneas de corriente indefinidas y erráticas → **ec. Bernoulli no se puede aplicar**

- En **1** el flujo entra como un chorro → líneas de corriente inicialmente paralelas → **no existe variación de presión en dirección transversal:**

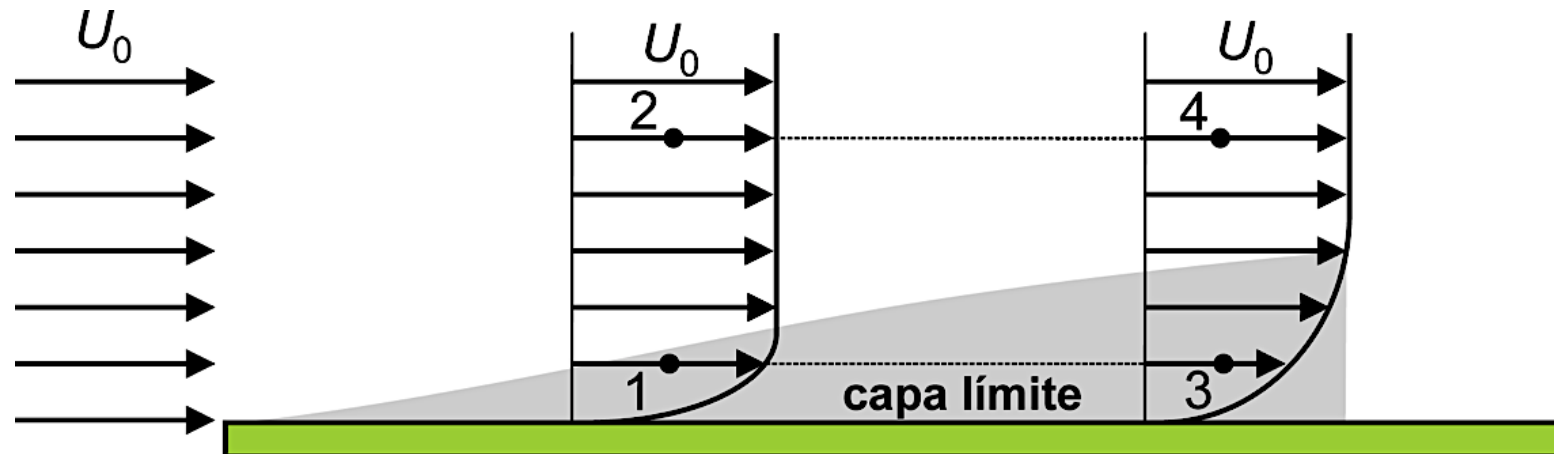
- **Caso análogo:** ensanchamiento en conducto



$$p_1 = \rho g h$$

5. Ejemplos

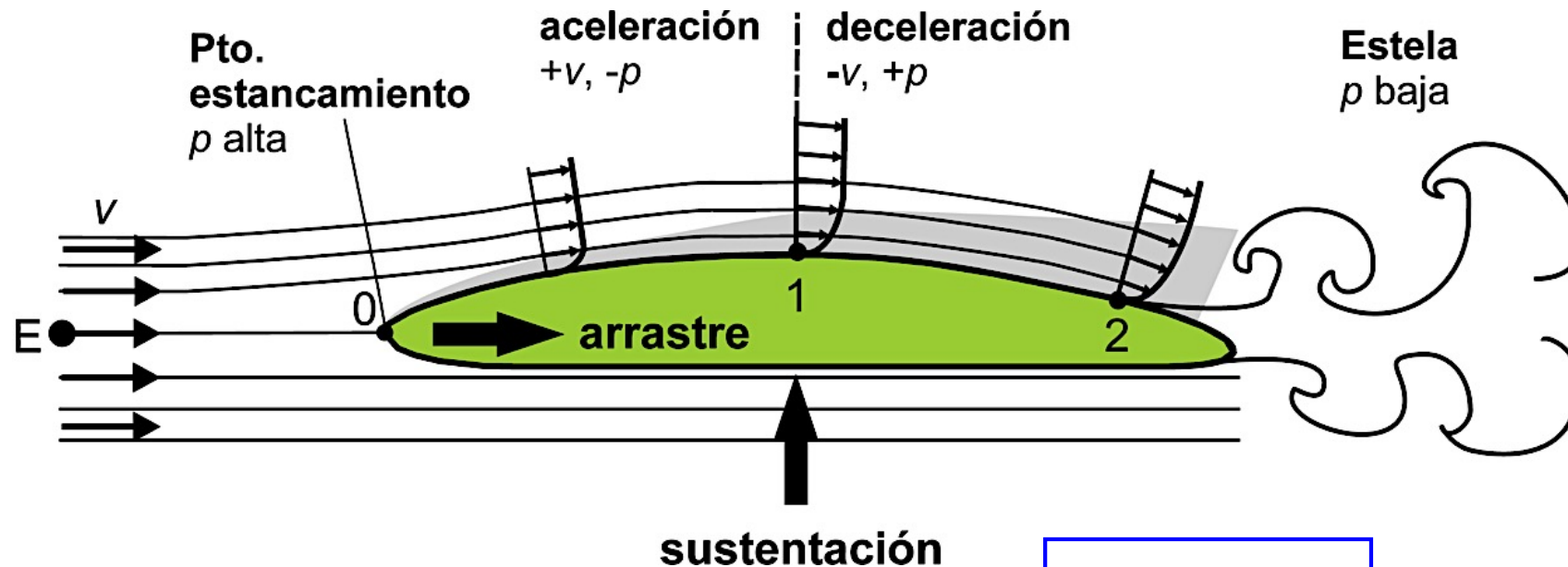
Ejemplo 7 → Flujo sobre placa plana:



- Entre 1 y 2; entre 3 y 4 : trayectoria rectilínea → presión no varía en dirección transversal → $p_1 = p_2$ y $p_3 = p_4$
- Entre 1 y 3: puntos en c. límite → gradiente de velocidad elevado → tensiones viscosas elevadas → flujo no se puede considerar ideal → **no es válida la ec. de Bernoulli**
- Entre 2 y 4: puntos fuera de c. límite → gradiente de velocidad nulo → no existen tensiones viscosas → flujo se puede considerar ideal → **la ec. de Bernoulli es válida**

5. Ejemplos

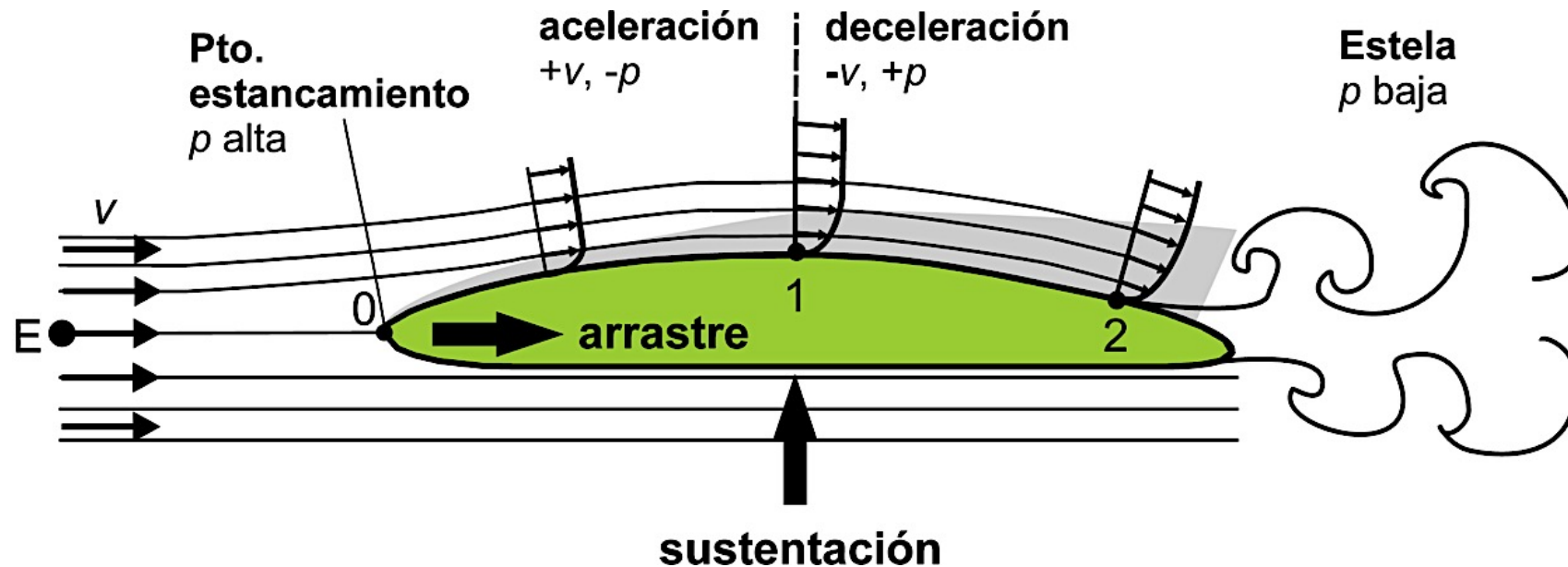
Ejemplo 8 → Flujo alrededor de cuerpo sumergido:



- En 0 el flujo alcanza su presión máxima o **de estancamiento**:
$$p_0 = p_E + \frac{\rho}{2} v^2$$
- Entre 0 y 1 las líneas de corriente convergen y el flujo se acelera. La velocidad aumenta y la presión disminuye (**condiciones favorables**). Se forma **capa límite** sobre el objeto.
- Entre 1 y 2 la velocidad disminuye y la presión aumenta (**condiciones desfavorables**). Si la energía del fluido en la capa límite no es suficiente como para continuar fluyendo, se produce **desprendimiento** de la capa límite.

5. Ejemplos

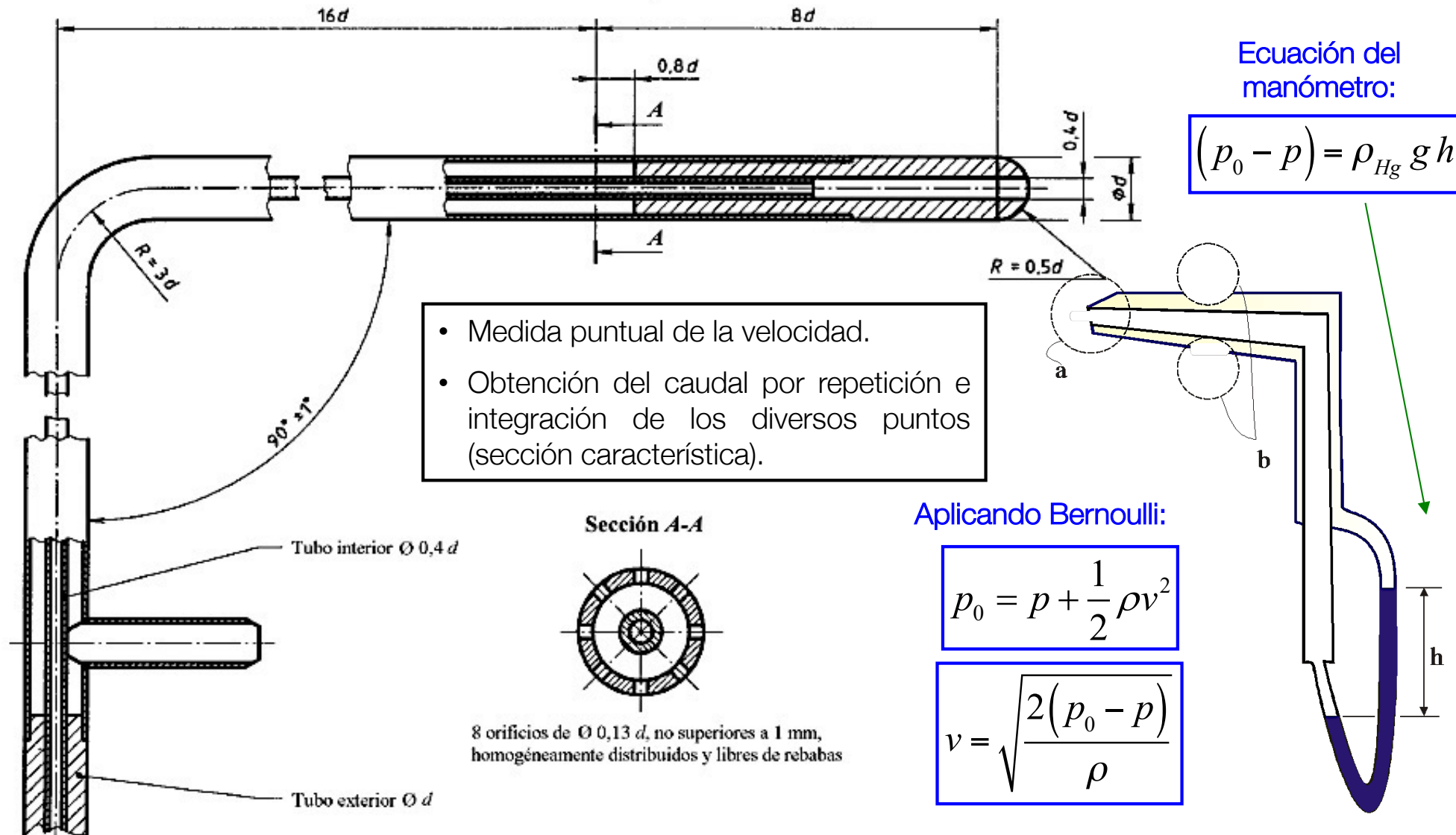
Ejemplo 8 → Flujo alrededor de cuerpo sumergido:



- El desprendimiento origina una zona de gran turbulencia y baja presión denominada **estela**.
- La diferencia entre la alta presión en 0 y la baja presión en la estela origina una **fuerza de arrastre** sobre el objeto en la dirección del flujo.
- La diferencia entre la presión en la zona inferior ($\sim p_E$) y la superior ($< p_E$ por la aceleración del flujo) genera una **fuerza de sustentación** sobre el objeto.

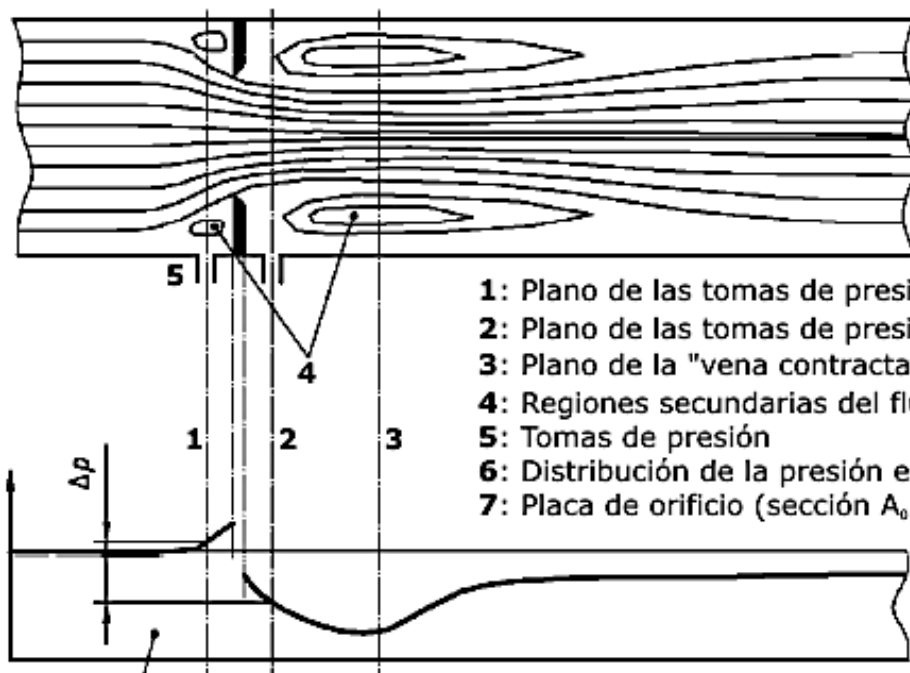
5. Ejemplos

Ejemplo 9 → Medida de velocidad con tubo de Pitot estático:



5. Ejemplos

Ejemplo 10 → Medida de caudal con placa de orificio:



- 1: Plano de las tomas de presión aguas arriba (sección A_1)
- 2: Plano de las tomas de presión aguas abajo (sección A_2)
- 3: Plano de la "vena contracta" (sección A_c)
- 4: Regiones secundarias del flujo
- 5: Tomas de presión
- 6: Distribución de la presión en la pared del conducto
- 7: Placa de orificio (sección A_0)

- Medida global del caudal.
- Requiere calibración previa de la placa. (Coeficiente k).
- Resolución iterativa para obtener el caudal.

$$Q = \frac{C_d}{\sqrt{1-\beta^4}} A_0 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

k

$$\beta = \frac{D_0}{D_1} = \sqrt{\frac{A_0}{A_1}}$$

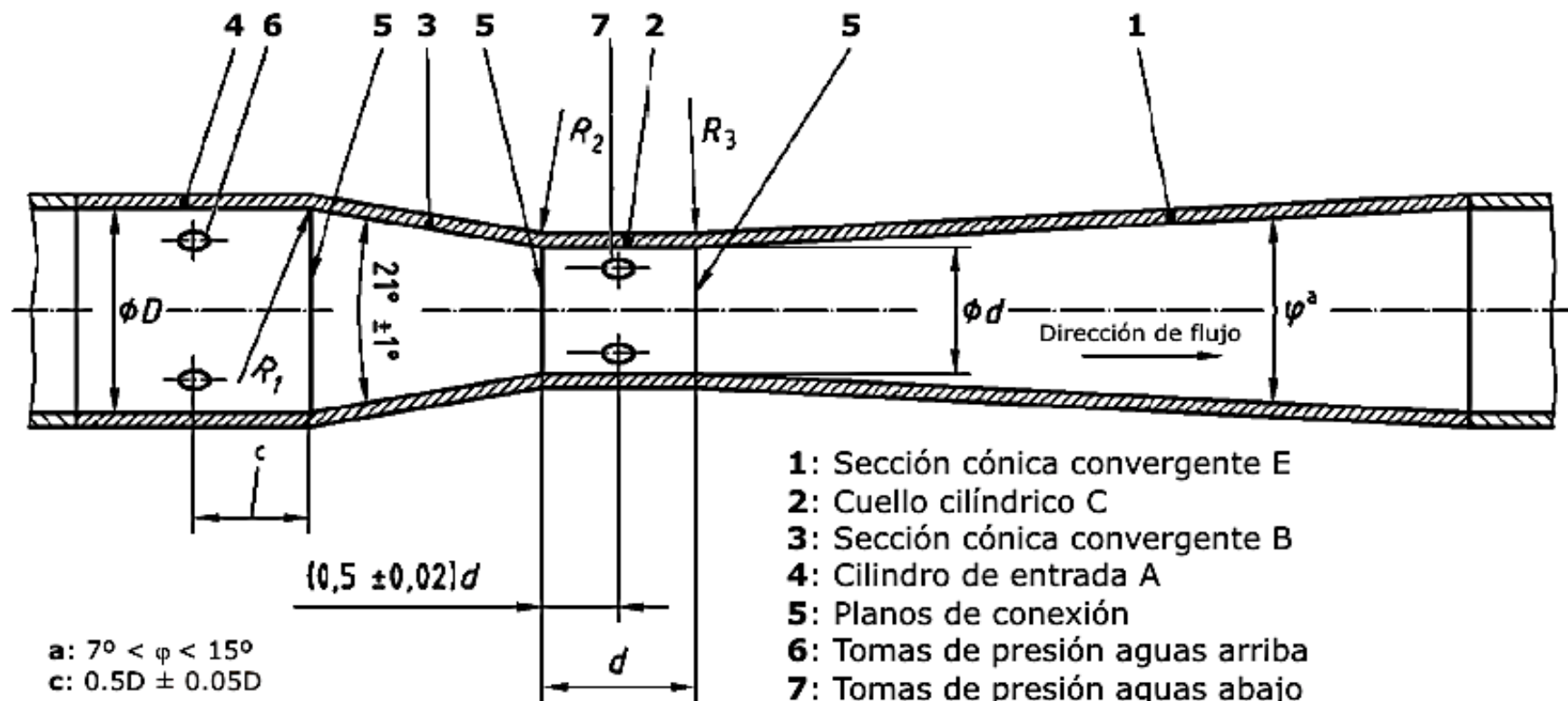
Tabla A.2
Placa de orificio con tomas a D y $D/2$. Coeficiente de descarga, C , para $D \geq 71,12$ mm

Relac. diám. β	Coeficiente de descarga, C para Re_{D_1} igual a											
	5×10^3	1×10^4	2×10^4	3×10^4	5×10^4	7×10^4	1×10^5	3×10^5	1×10^6	1×10^7	1×10^8	∞
0,10	0,600 3	0,598 7	0,597 7	0,597 3	0,596 9	0,596 7	0,596 6	0,596 3	0,596 2	0,596 1	0,596 1	0,596 0
0,12	0,601 0	0,599 1	0,597 9	0,597 5	0,597 1	0,596 9	0,596 7	0,596 4	0,596 2	0,596 1	0,596 1	0,596 1
0,14	0,601 6	0,599 5	0,598 2	0,597 7	0,597 2	0,597 0	0,596 8	0,596 5	0,596 3	0,596 2	0,596 1	0,596 1
0,16	0,602 3	0,600 0	0,598 5	0,598 0	0,597 4	0,597 2	0,597 0	0,596 6	0,596 4	0,596 2	0,596 2	0,596 2
0,18	0,602 9	0,600 4	0,598 9	0,598 2	0,597 7	0,597 4	0,597 1	0,596 7	0,596 5	0,596 3	0,596 3	0,596 3
0,20	0,603 7	0,600 9	0,599 2	0,598 5	0,597 9	0,597 6	0,597 4	0,596 9	0,596 6	0,596 4	0,596 4	0,596 4

De forma aproximada (para evitar iterar), se puede tomar $C_d = 0.6$

5. Ejemplos

Ejemplo 11 → Medida de caudal con tubo de Venturi:



- Medida global del caudal.
- Mismo principio de funcionamiento que la placa de orificio.
- Transición muy suavizada de la sección: coeficiente de descarga próximo a 1.

$$Q = \underbrace{\frac{C_d}{\sqrt{1-\beta^4}}}_k A_0 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$$

$$\beta = \frac{d}{D} = \sqrt{\frac{A_0}{A_1}}$$

$$C_d = 0.9858 - 0.196 \beta^{4.5} \approx 1$$

6. Ecuación de Navier-Stokes

6.1 Ecuación de Cauchy