



Tema 3: Cinemática



Ingeniería Hidráulica
Universidad de Oviedo

Hidráulica e Hidrología 2º Ing. Civil y Doble Grado

Curso 2022/2023

Antonio Navarro Manso
Prof. Dr. Ingeniero de Caminos

Índice

1. Introducción
2. Descripción Lagrangiana y Euleriana
3. Trayectorias, líneas de corriente y líneas de traza
4. Aceleración



1. Introducción

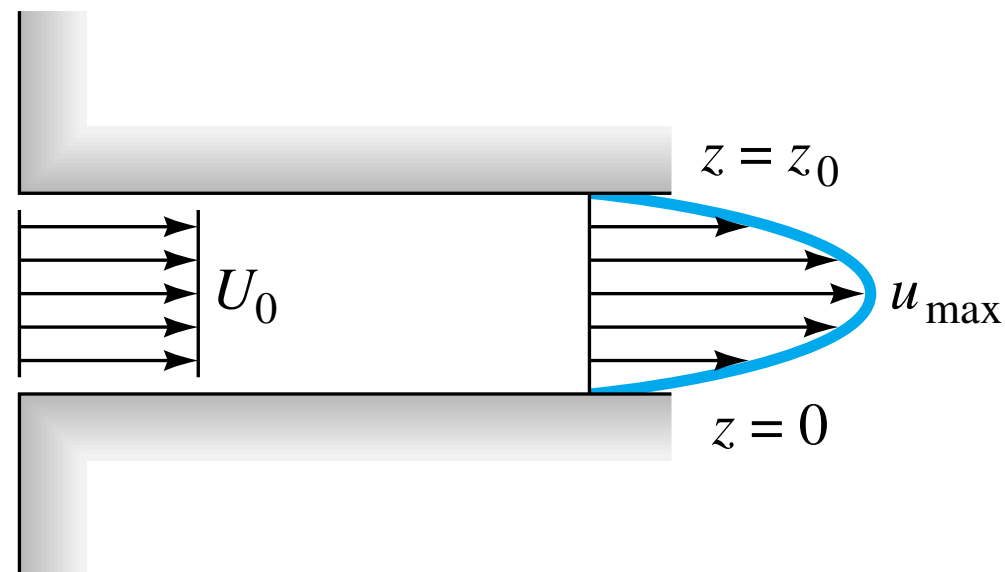


The Starry Night, 1889, V. Van Gogh. MoMA, New York.

1. Introducción

1.1 Tipos de flujo

El movimiento de un fluido puede ser **ideal** o **real**:



- **Ideal:** sin viscosidad; en un conducto recto, todas las partículas se mueven en líneas paralelas e igual velocidad.

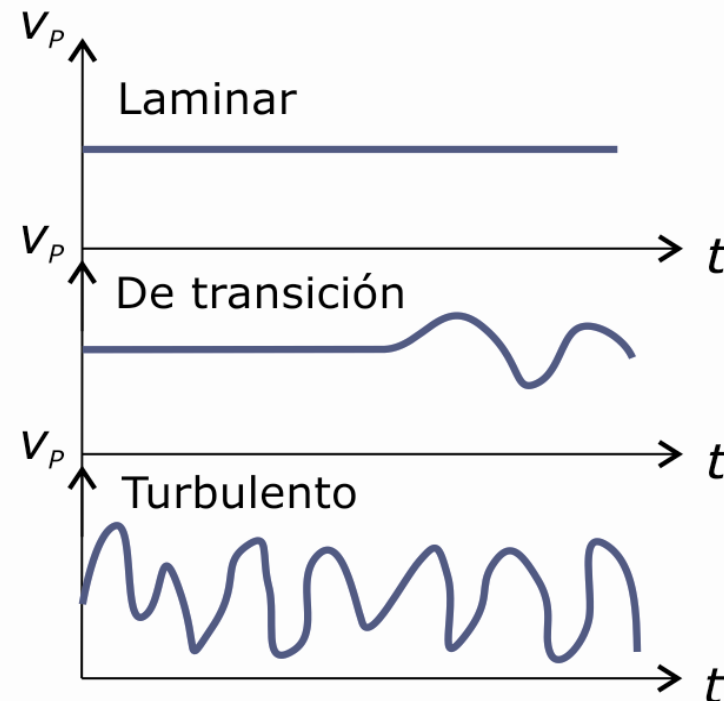
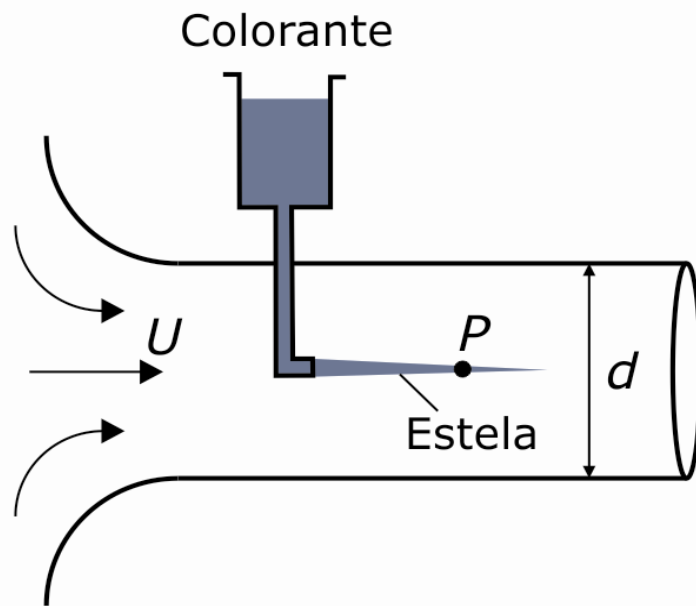
- **Real:** con viscosidad; se producen esfuerzos cortantes y gradientes de velocidad; adherencia en los contornos.

1. Introducción

1.2 Tipos de flujo: laminar y turbulento

El movimiento de un fluido puede ser **laminar**, de **transición** o **turbulento**:

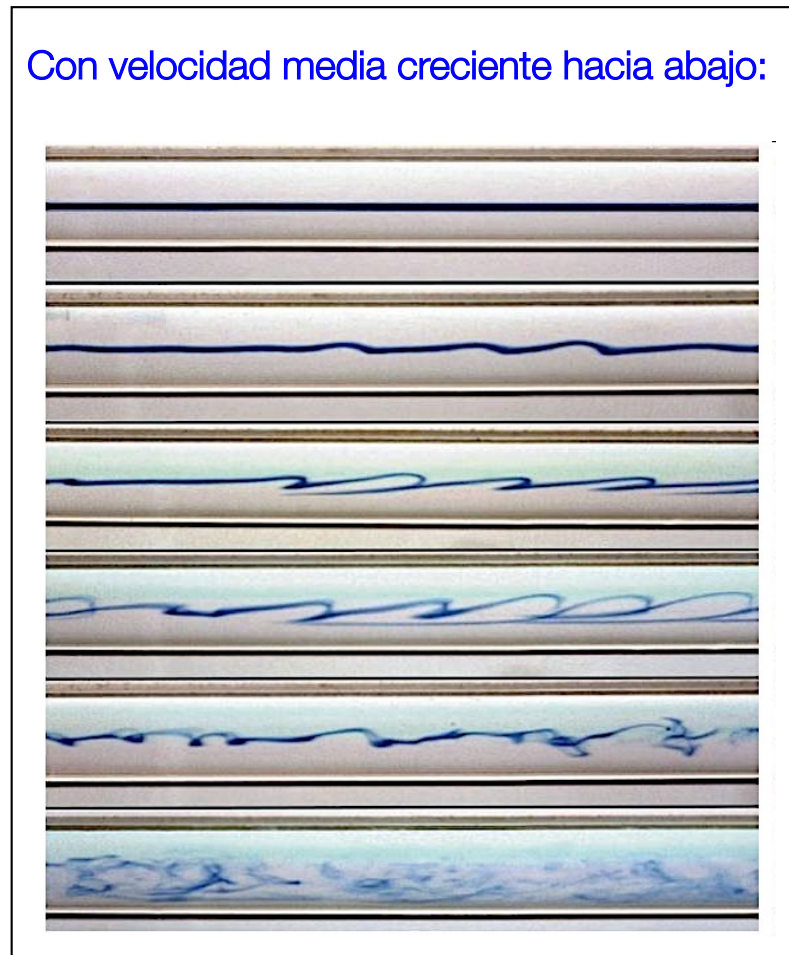
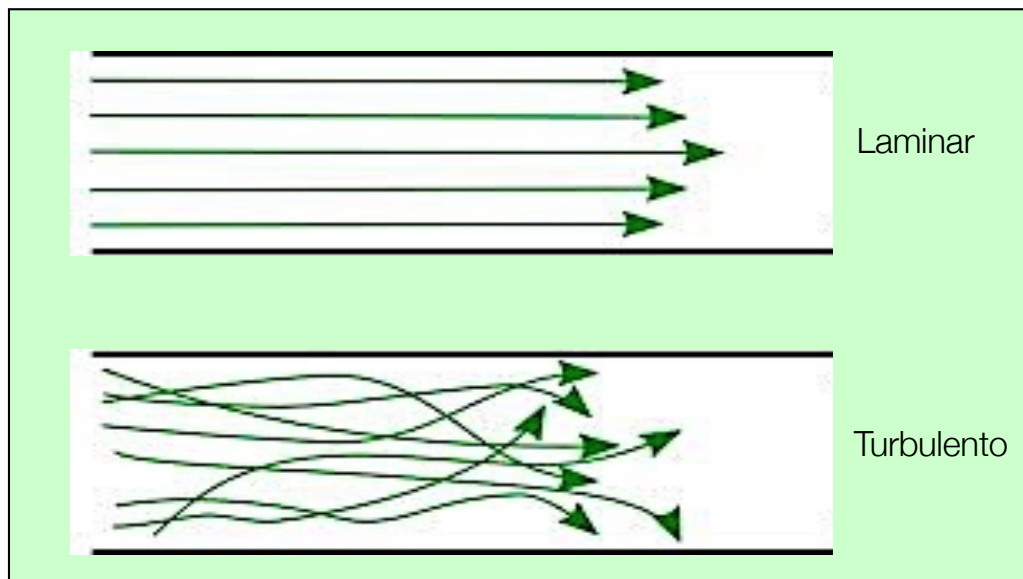
Experimento de Reynolds* :



* Osborne Reynolds
(1842-1912)

1. Introducción

1.2 Tipos de flujo: laminar y turbulento

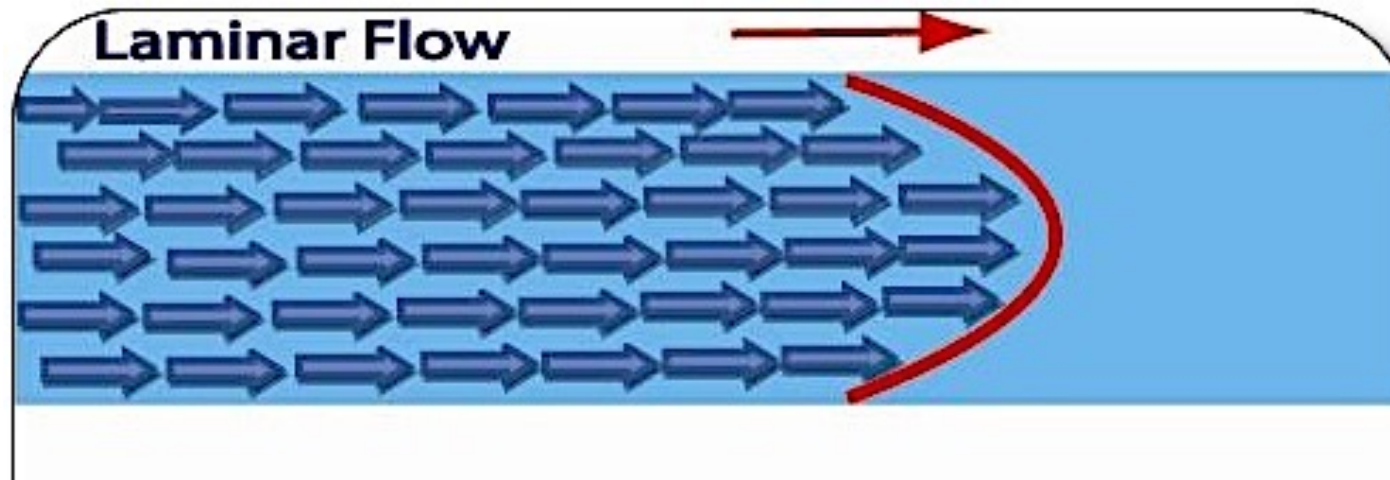


1. Introducción

1.2 Tipos de flujo: laminar y turbulento

Flujo **laminar** = estable (de líneas de corriente o viscoso):

- Movimiento como deslizamiento de láminas de espesor infinitesimal sobre las láminas adyacentes.
- El movimiento relativo de partículas ocurre a escala molecular.
- Las partículas se mueven en líneas de corriente o trayectorias definidas y observables.
- Cualquier perturbación se amortigua.
- Sucede si las tensiones viscosas son “grandes”, el parámetro que gobierna el flujo es la viscosidad

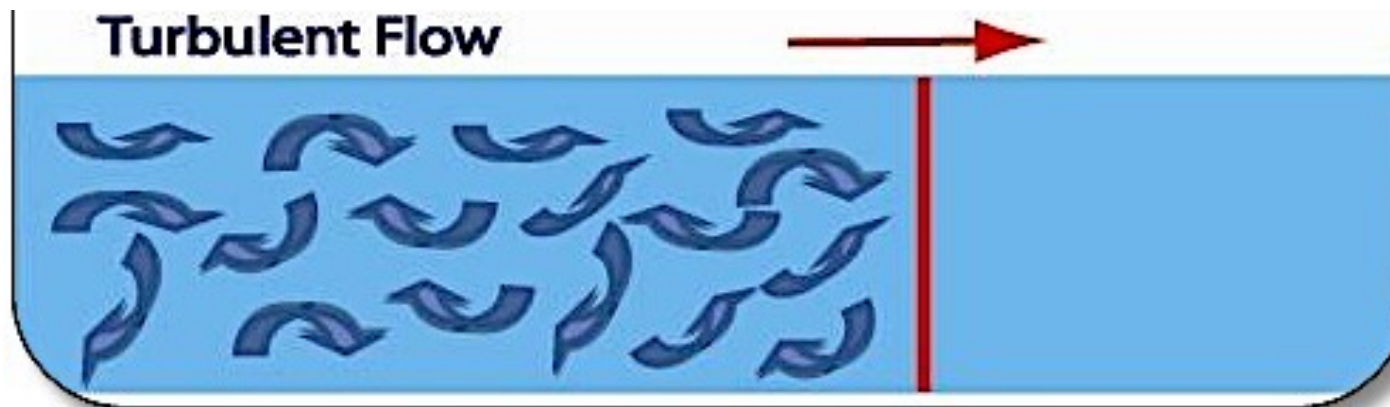


1. Introducción

1.2 Tipos de flujo: laminar y turbulento

Flujo **turbulento** = inestable:

- Irregular; la velocidad fluctúa en todos los puntos del campo fluido (variaciones rápidas, irregulares, continuamente cambiantes en dirección y magnitud).
- El fluido se mueve en una serie de “paquetes” (remolinos), que se empujan entre ellos de forma aleatoria.
- Cualquier perturbación se amplifica hasta afectar a todo el flujo, dando lugar a una sucesión de remolinos que viajan con la corriente mientras se van deshaciendo en remolinos más pequeños.
- Sucede si las tensiones viscosas son “pequeñas”.



1. Introducción

1.2 Tipos de flujo: laminar y turbulento



Los flujos son laminares o turbulentos en función del **Número de Reynolds** :

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu}$$

ρ : densidad
 U : velocidad característica del flujo
 L : longitud característica del dominio
 μ : viscosidad dinámica

Caso de flujo en tubería de sección circular:

Laminar: $Re < 2300$

De transición: $2300 < Re < 4000$

Turbulento: $Re > 4000$

1. Introducción

1.2 Tipos de flujo: laminar y turbulento



Turbulencias en la estela de un avión.

1. Introducción

1.2 Tipos de flujo: laminar y turbulento



Puente Romano del Río Sella, turbulencia aguas abajo.

1. Introducción

1.3 Tipos de flujo: estacionario (o permanente), transitorio; uniforme, variado

Flujo **estacionario**:

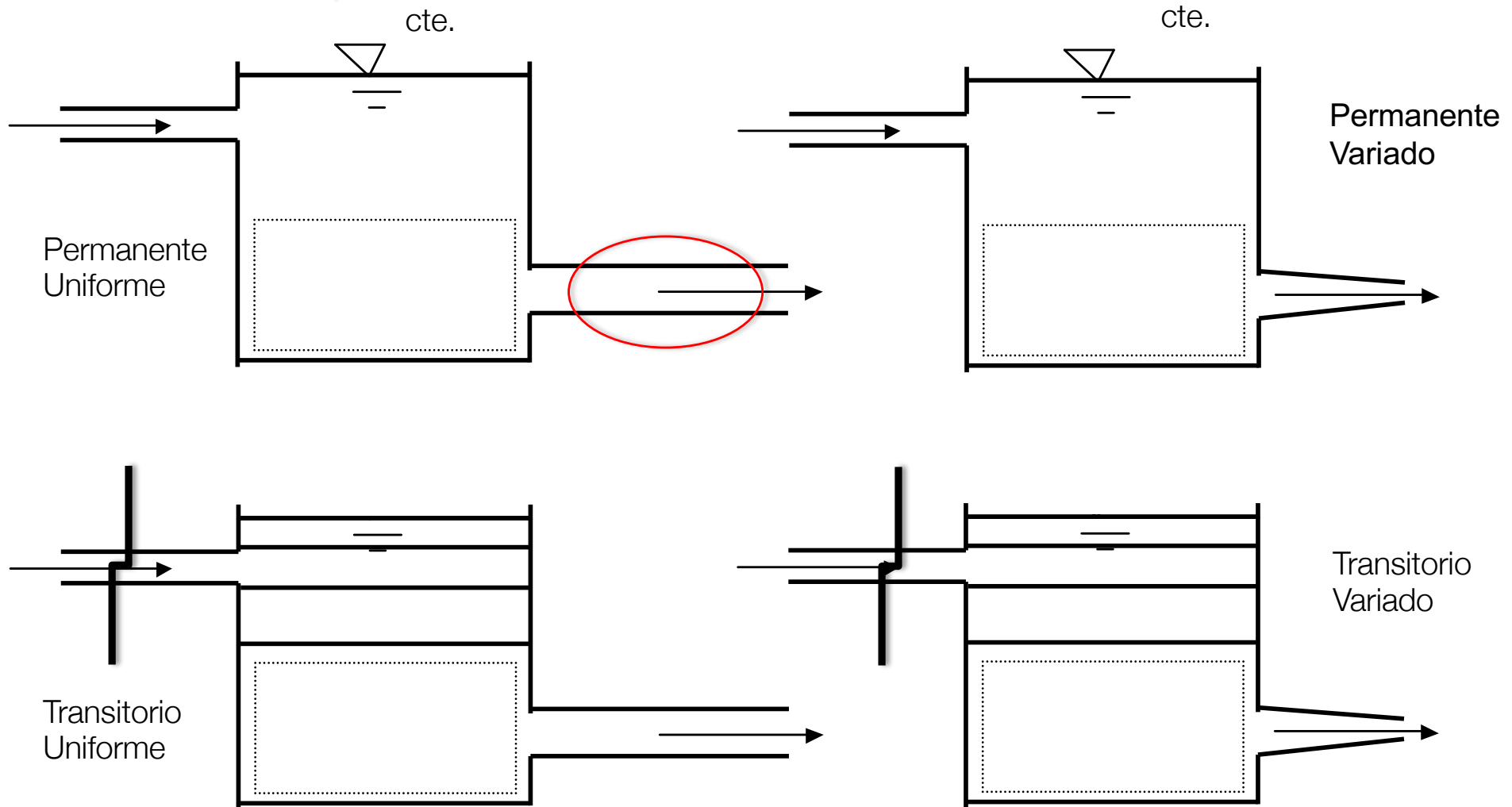
- Todas las condiciones en un punto dentro de una corriente se mantienen constantes con respecto al tiempo.
- Las condiciones pueden ser distintas en puntos diferentes (ej.: permanente variado).

Flujo **uniforme**:

- La velocidad en un instante dado es igual en magnitud y dirección en cada punto del fluido.
- Las condiciones pueden ser distintas en tiempos diferentes (ej.: transitorio uniforme).

1. Introducción

1.3 Tipos de flujo: estacionario (o permanente), transitorio; uniforme, variado



1. Introducción

1.3 Tipos de flujo: estacionario (o permanente), transitorio; uniforme, variado

Clasificar los siguientes flujos:

- Agua que fluye desde un cubo inclinado.
- Aspersor giratorio para césped.
- Manguera de conexión con el aspersor.
- Corriente natural en época seca.
- Corriente natural en época de riada.
- Alcantarilla recta de sección constante y sin conexiones.

2. Descripción Lagrangiana y Euleriana

2.1 Campo de velocidades

Campo de velocidades: dominio con partículas fluidas en movimiento. En cada instante en una **posición** se encuentra una **partícula**.

Leonhard Euler (1707-1783)
Giuseppe L. Lagrangia (1736-1813)

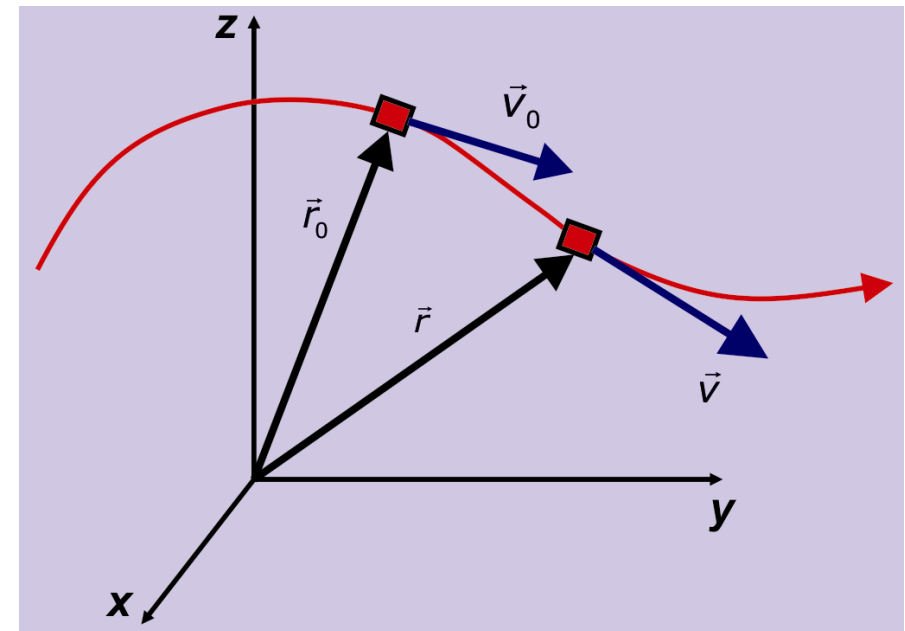
Punto de vista lagrangiano: atención sobre cada partícula:

$$\vec{v} = f(\text{posición, instante}) = f(\vec{r}_0, t_0, t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Punto de vista euleriano: atención sobre cada posición:

$$\vec{v} = f(\text{posición, instante}) = f(\vec{r}, t)$$

El punto de vista euleriano es el **más habitual** por ser el más simple.



2. Descripción Lagrangiana y Euleriana

2.1 Campo de velocidades

Consideremos un campo de velocidades bajo descripción euleriana definido en coordenadas cartesianas como:

$$\vec{v} = (u, v, w) = f(x, y, z, t)$$

Podemos encontrar los siguientes **tipos de flujos** dependiendo del comportamiento del campo de velocidades:

- **Flujo estacionario:** $\vec{v} \neq f(t)$

- **Flujo uniforme:** $\vec{v} \neq f(\vec{r})$

- **Flujo unidireccional:** $\vec{v} = f(u(\vec{r}, t), 0, 0)$

- **Flujo unidimensional:** $\vec{v} = f(u(x, t), 0, 0)$

- **Flujo incompresible:** $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

- **Flujo irrotacional:** $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0; \quad \vec{\omega} : \text{vorticidad}$

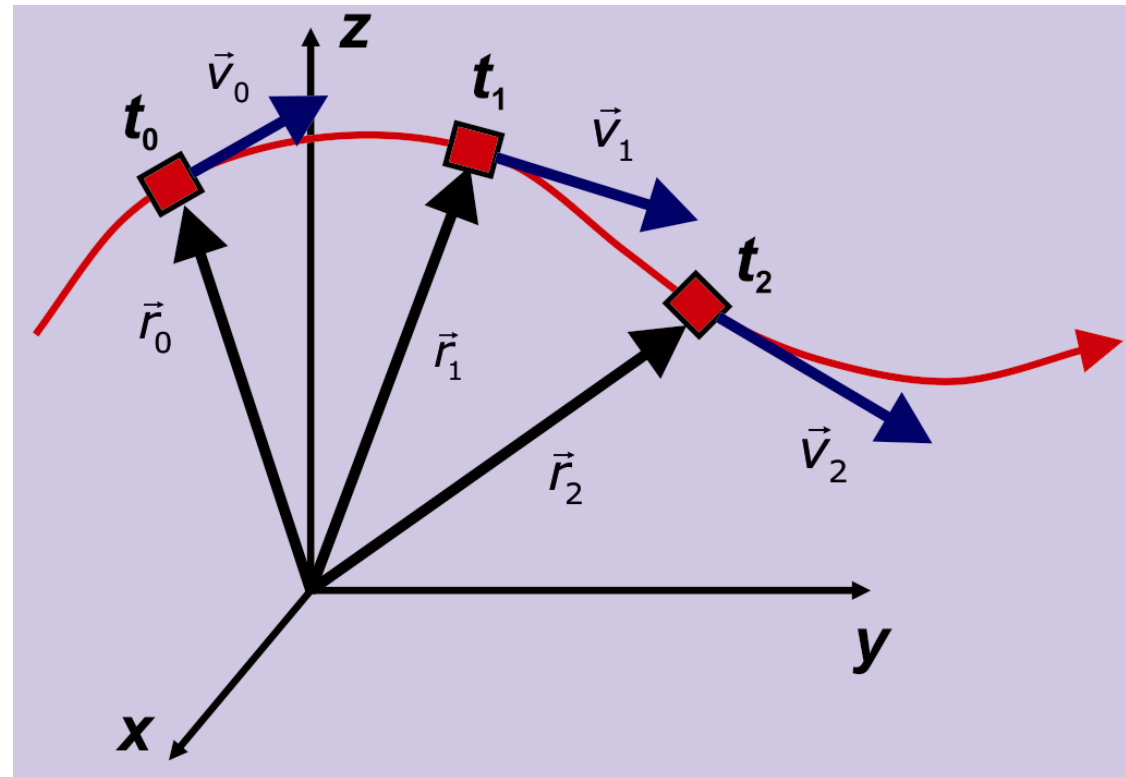
3. Trayectorias, líneas de corriente y de traza

3.1 Trayectoria

Línea que va recorriendo una partícula a lo largo del tiempo. **Punto de vista lagrangiano.**

- Velocidad tangente en todos los puntos.
- Cálculo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} u = dx / dt \\ v = dy / dt \\ w = dz / dt \end{cases}$$



3. Trayectorias, líneas de corriente y de traza

3.1 Trayectoria



“Trayectoria”: despegue de un avión.

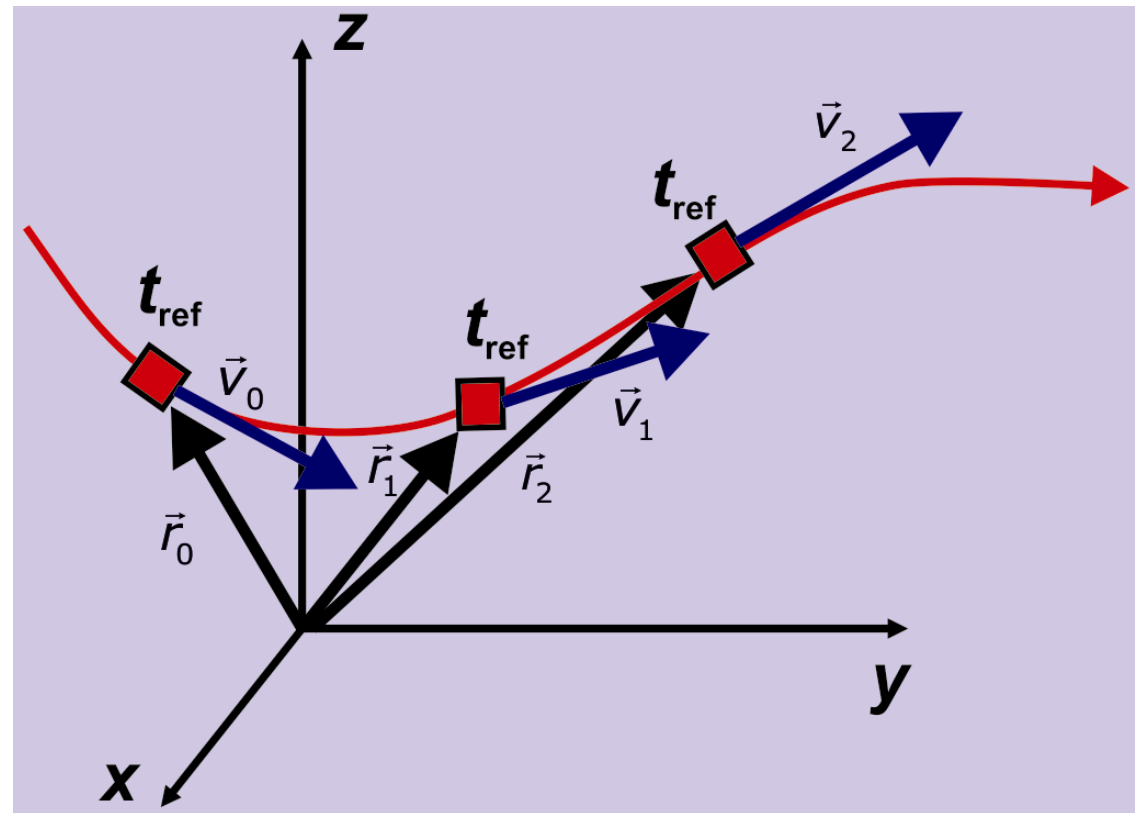
3. Trayectorias, líneas de corriente y de traza

3.2 Líneas de corriente

Línea que en un instante t_{ref} es tangente al vector velocidad en todos los puntos. [Punto de vista euleriano.](#)

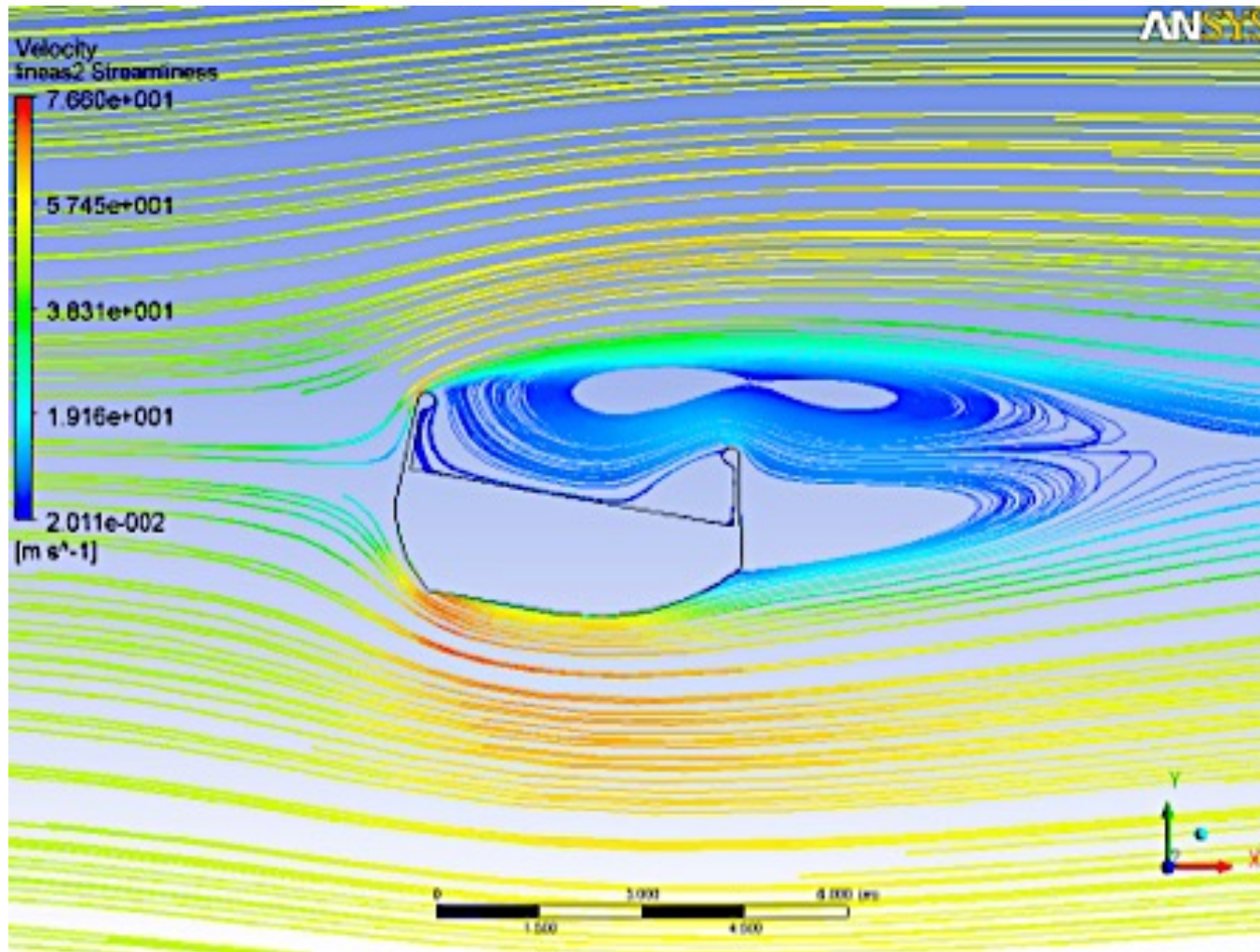
- Cálculo:

$$\vec{v} \parallel d\vec{r} \Rightarrow \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$



3. Trayectorias, líneas de corriente y de traza

3.2 Líneas de corriente



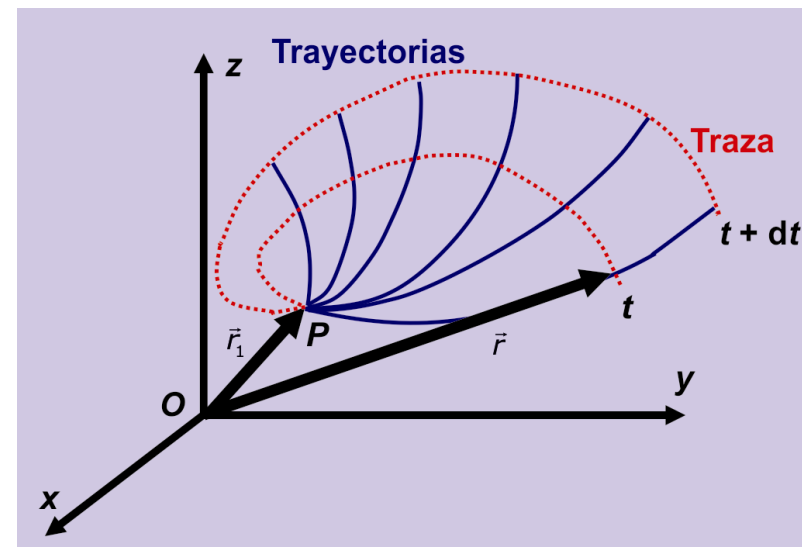
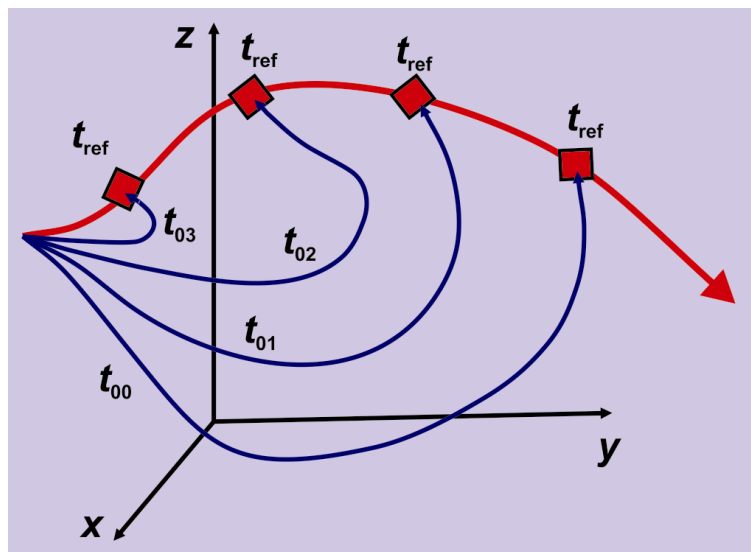
“Líneas de Corriente”: estudio aerodinámico Pasarela de Pravia.

3. Trayectorias, líneas de corriente y de traza

3.3 Trazas

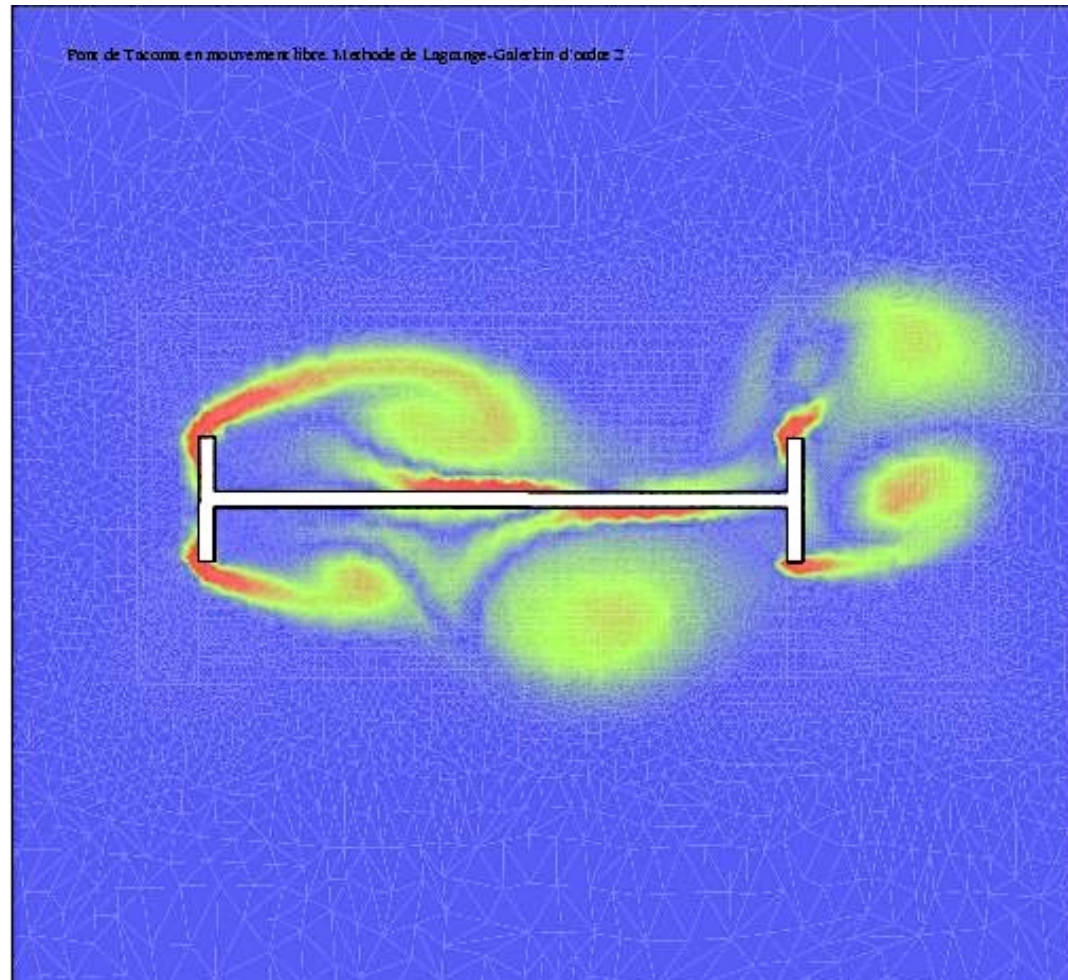
Línea que en un instante t_{ref} definen las partículas que han ido pasando por una misma posición de referencia r_0 en distintos instantes previos t_0 .

- Son las líneas que se visualizan en experimentación con inyección de colorantes u otras técnicas.
- Cálculo: a partir de las trayectorias de cada partícula tomando t_0 como parámetro variable y $t = t_{ref}$ como parámetro fijo.



3. Trayectorias, líneas de corriente y de traza

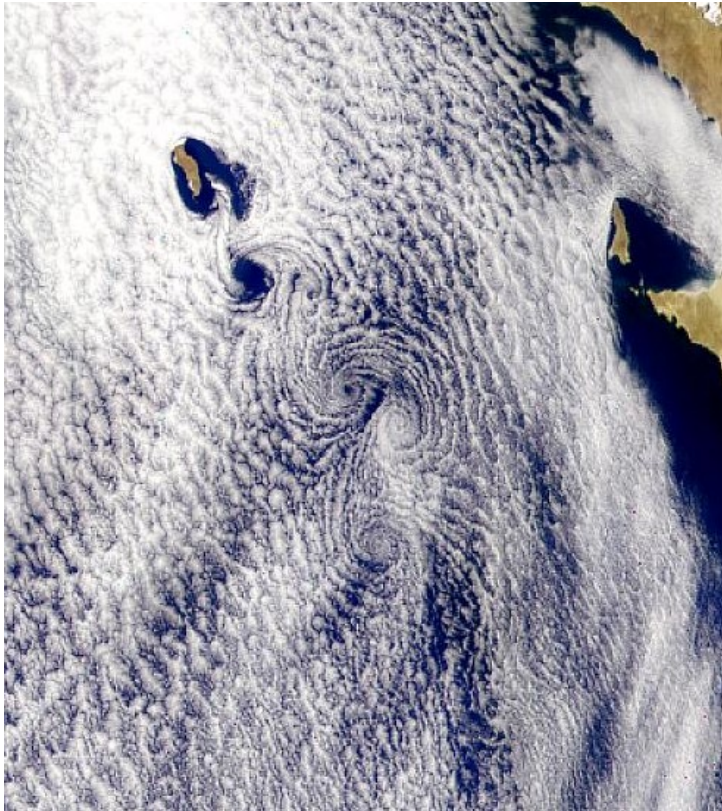
3.3 Trazas



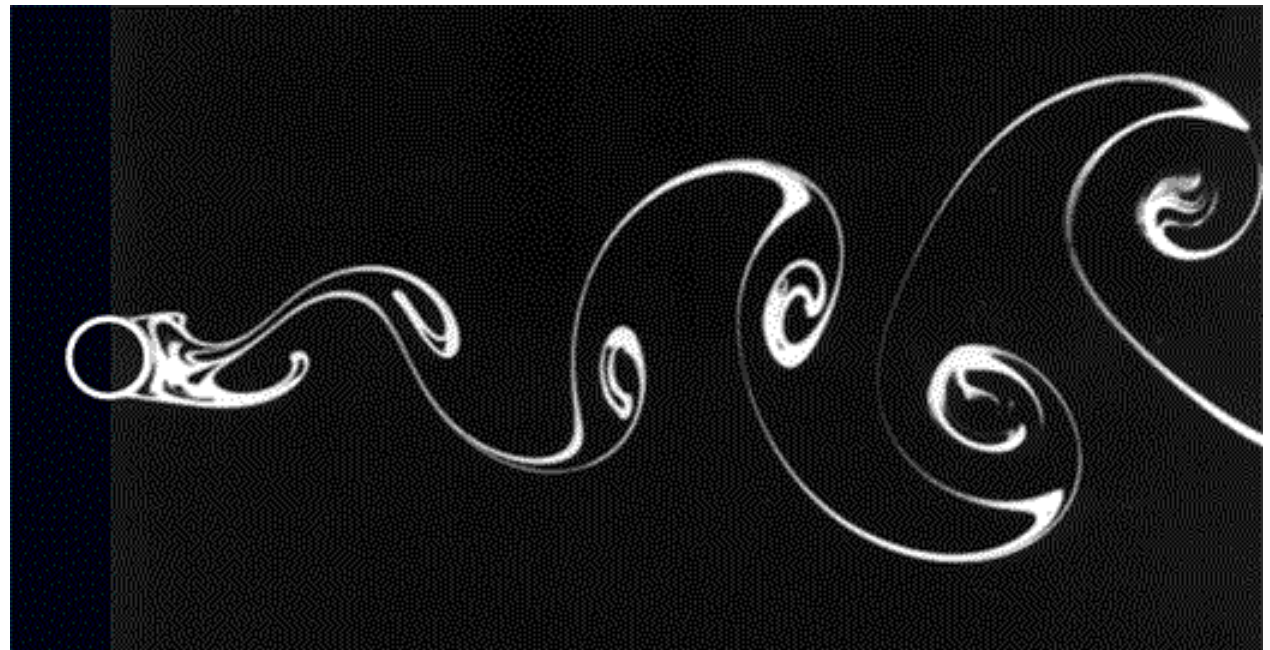
“Traza”: Tacoma Narrows Bridge

3. Trayectorias, líneas de corriente y de traza

3.4 Fenómenos reales



“Traza”: remolinos de Von Karman, simulación y fenómeno sobre California.

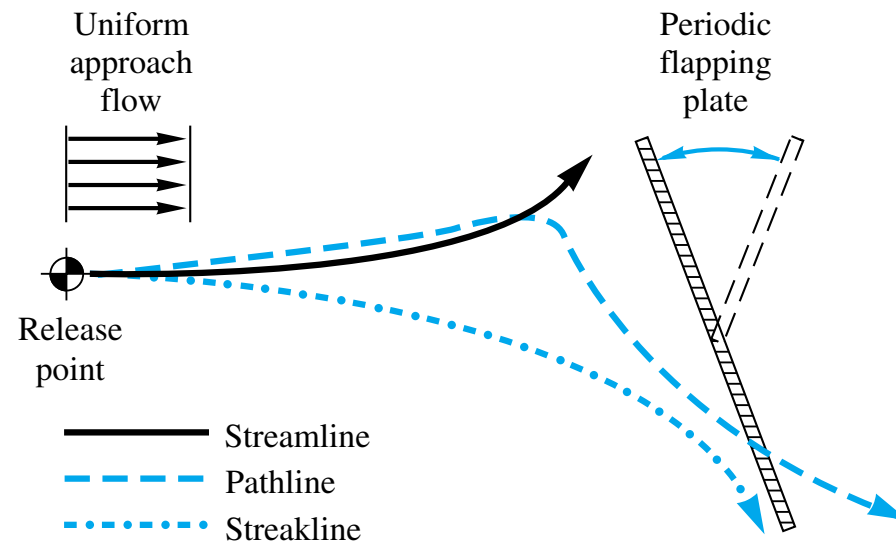
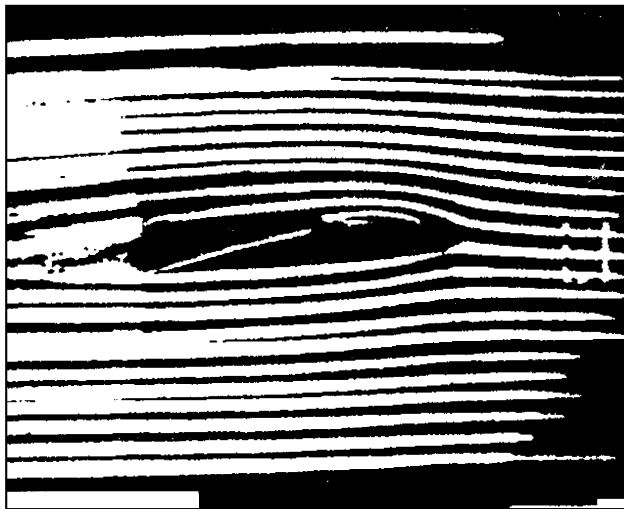


Van Dyke, M. An Album of Fluid Motion,
The Parabolic Press, Stanford, 2002.

3. Trayectorias, líneas de corriente y de traza

3.5 Comparación

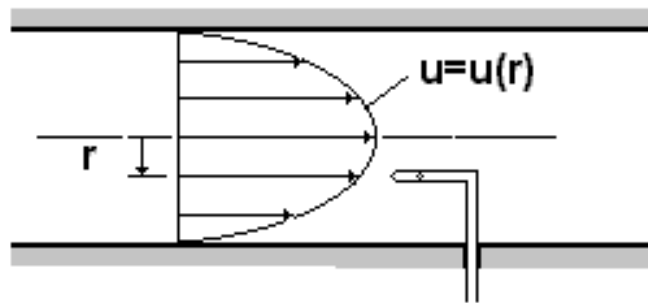
- **Caso de flujo estacionario:** las trayectorias, las líneas de corriente y las líneas de traza son coincidentes.



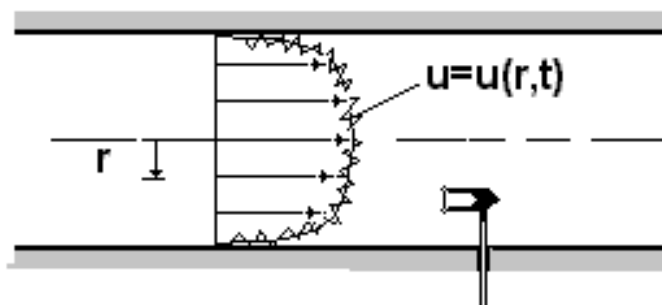
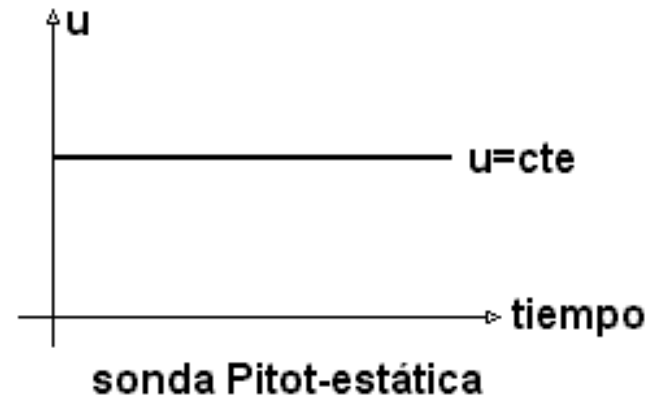
- **Videos:** tipos de “líneas”, visualización y descripción.

4. Aceleración

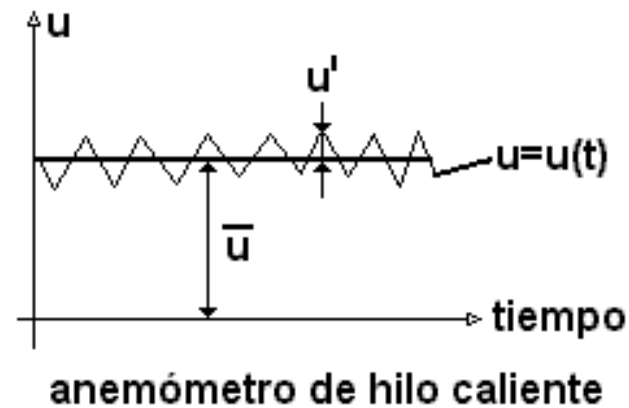
4.1 Velocidad y fluctuación turbulenta



Flujo laminar estacionario



Flujo turbulento estacionario



$$u_t = u + u'$$

$$u = \frac{1}{t} \int_0^t u_t dt$$

4. Aceleración

4.2 Variaciones locales y convectivas

c = **magnitud intensiva** con descripción euleriana $\rightarrow c = f(\vec{r}, t)$

c_s = **valor instantáneo** de c medido por un sensor ideal, fijo o móvil.

Variación local o temporal: la que observa un sensor en posición fija: $\frac{dc_s}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t}$

Variación de transporte \rightarrow la que observaría un sensor que se desplaza a la velocidad \vec{v}_s en flujo estacionario. Ej:

$$\text{Con } \vec{v}_s = (u_s, 0, 0) \rightarrow \frac{dc_s}{dt} = \frac{\partial c_s}{\partial x_s} \frac{dx_s}{dt} = u_s \frac{\partial c}{\partial x}$$

Variación convectiva \rightarrow la que observaría un sensor que se desplaza con las partículas de un flujo estacionario a su misma velocidad:

$$\vec{v} = (u, v, w) \rightarrow \frac{dc_s}{dt} = u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \vec{v} \cdot \nabla c$$

4. Aceleración

4.2 Variaciones locales y convectivas

Variación total, material o sustancial → la que observaría un sensor que se desplaza con las partículas de un flujo no estacionario a su misma velocidad:

$$\boxed{\frac{dc_s}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla c = \frac{Dc_s}{Dt}} = \text{variación local + convectiva}$$

4. Aceleración

4.3 Aceleración

Caso particular: propiedad intensiva, $c =$ velocidad $\rightarrow c = \vec{v} = (u, v, w, t)$

Aceleración de una partícula:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{a}_{\text{LOC}} + \vec{a}_{\text{CON}}$$

Aceleración local: $\vec{a}_{\text{LOC}} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t} \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$

Aceleración convectiva: $\vec{a}_{\text{CON}} = (\vec{v} \cdot \nabla u, \vec{v} \cdot \nabla v, \vec{v} \cdot \nabla w) = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} =$
 $= \left(u \frac{\partial}{\partial x}, v \frac{\partial}{\partial y}, w \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} = u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$

Aceleración total:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

4. Aceleración

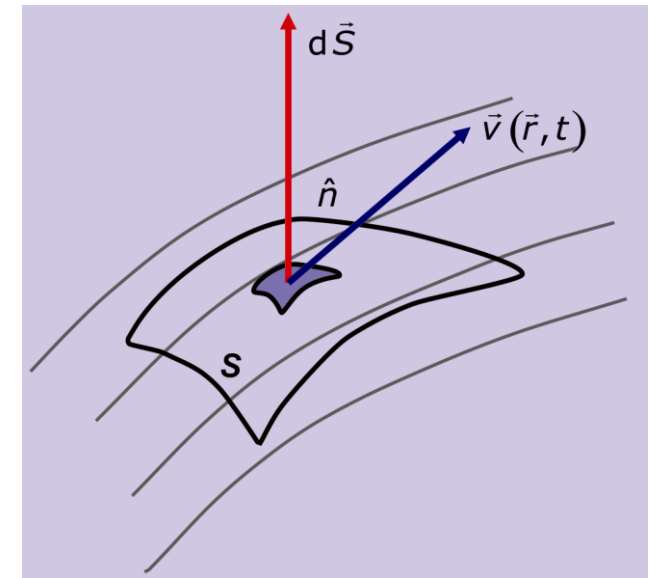
4.4 Flujo convectivo

Sea C una magnitud **extensiva** y c una magnitud **intensiva** asociada:

Flujo convectivo de C = cantidad de C que pasa a través de una superficie S por unidad de tiempo:

$$\Phi = \frac{\partial C}{\partial t} = \int_S c (\vec{v}_r \cdot d\vec{A})$$

\vec{v}_r = velocidad relativa de las partículas respecto a cada $d\vec{A}$



Ejemplos:

Flujo volumétrico o caudal (incompresibles):

$$C = V \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \Phi = Q = \int_S \vec{v}_r \cdot d\vec{A}$$

Flujo másico (compresibles):

$$C = m \Rightarrow c = \rho \Rightarrow \Phi = \dot{m} = \int_S \rho (\vec{v}_r \cdot d\vec{A})$$

4. Aceleración

4.4 Flujo convectivo

Flujo de C a través de una superficie cerrada S:

- Si no hay generación o destrucción de C entonces el flujo convectivo es igual a la variación de C en el interior de S:

$$\Phi = \oint_S c (\vec{v}_r \cdot d\vec{A}) = -\frac{\partial C_{\text{INT}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\vartheta} c \, dV$$

- Como convenio se toma el diferencial de área positivo hacia fuera del volumen delimitado.
- Los flujos salientes son positivos y los flujos entrantes son negativos.

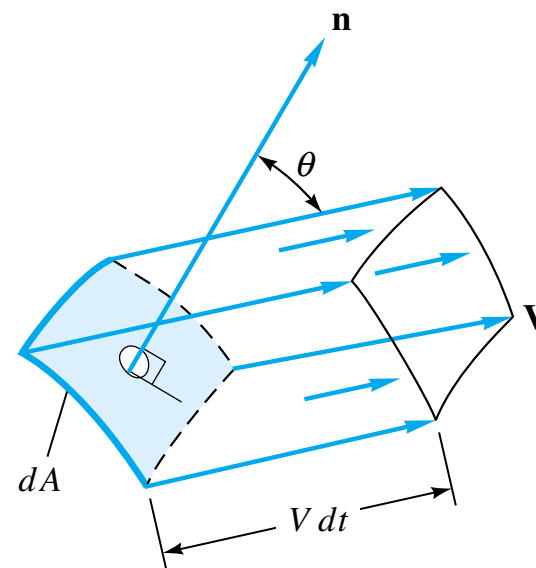
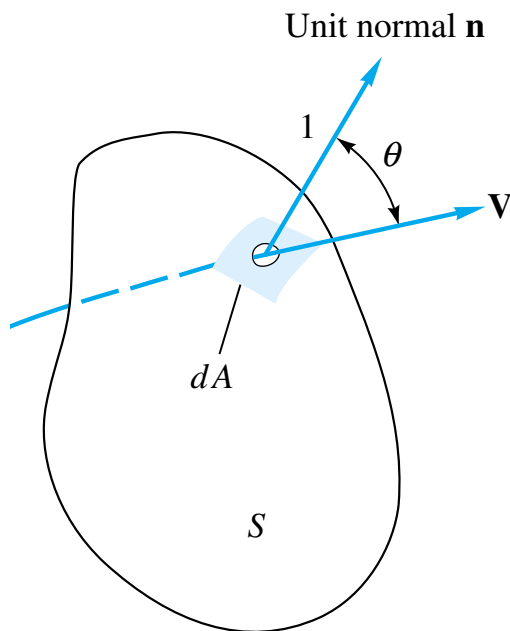
4. Aceleración

4.4 Flujo convectivo

$$d\mathcal{V} = V dt dA \cos \theta = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA dt$$

The integral of $d\mathcal{V}/dt$ is the total volume rate of flow Q through the surface S

$$Q = \int_S (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_S V_n dA$$



Conclusiones

- Descripción del movimiento desde un punto de vista euleriano.
- Descripción de los tipos de flujo, en función de las variaciones locales y convectivas:
 - Laminar y turbulento.
 - Estacionario/transitorio; uniforme/variado.
- Caracterización del flujo mediante:
 - Trayectorias (no).
 - Líneas de corriente.
 - Trazas.
- Aceleración: componentes local y convectiva:
 - Definición de la aceleración a través de la velocidad según el movimiento.